LE NON-HYDROSTATISME POUR LES DEBUTANTS

Pierre BÉNARD
CNRM/GMAP/MOD

09/06/2000

A QUI CECI S'ADRESSE-T-IL ?

Ce court document s'adresse a ceux qui veulent comprendre d'une manière simple:

- ce qu'est l'hydrostatisme
- ce qu'est le non-hydrostatisme
- pourquoi et comment cela peut etre important
- quel rapport cela a avec la prévision opérationnelle

L'esprit de ce document est d'éviter le plus possible le recours à des équations compliquées: on veut essayer d'illustrer les principales idées et les principaux concepts liées au non-hydrostatisme en faisant surtout ressortir le sens physique qui se cache deriière les quelques équations présentées, tout en restant bien sûr le plus rigoureux possible au niveau scientifique.

Ce document devrait en principe être accessible a TOUS les personnels techniques de Météo-France, étant donné que les équations et les connaissances abordées on été vues en terminale pour l'immense majorité. Evidemment, certaines équations présentées, propres à la météorologie, ne sont pas dans le programme de terminale, mais elle ne font appel à aucun arsenal mathématique supplémentaire, et donc on espère que l'effort de patience pour les lire et les assimiler en détail sera récompensé par une compréhension intime des phénomènes discutés ici.

On essaye donc ici de faire "sentir" grosso-modo ce qu'est le non-hydrostatisme quels sont les enjeux qui y sont liés en un rapide survol de la question. Pour une connaissance plus complète de la question, il faut ensuite passer à des documents plus comlexes , mais on ne peut alors plus l'économie d'équations plus laborieuses.

INTRODUCTION

Dans la plupart des modèles opérationnels de Prévision Numérique (PN) dans le monde, l'hypothèse simplificatrice dite "hypothèse hydrostatique" a été adoptée jusqu'à maintenant. Cette hypothèse simplifie considérablement les équations que l'on doit résoudre pour faire une prévision. Donc les modèles de PN, bâtis sur cette hypothèse sont relativement simples et économiques (en nombre de calculs pour une prévision donnée) à mettre en œuvre. On dit que ces modèles sont **hydrostatiques**.

Bientôt, disons dans quelques années, la plupart des modèles opérationnels de PN, du moins ceux dont la résolution est la plus fine, seront **non-hydrostatiques**, c'est à dire qu'ils abandonneront cette hypothèse simplificatrice. Du point de vue de la dynamique des modèles cela constituera une petite révolution, car certains phénomènes seront prévus d'une manière plus réaliste.

On peut comparer cette révolution à d'autres révolutions qui ont marqué la PN dans d'autres domaines:

- Numérique : Passage des méthodes eulériennes aux méthodes semi-lagrangiennes (1995)
- Analyse : Passage de l'interpolation optimale à la méthode variationnelle 3D (3D-VAR) (1998)
- Assimilation : passage de l'assimilation intermittente à la méthode variationnelle adjointe (2000) continue dans le temps (4D-VAR)
- Dynamique : Passage de l'hydrostatisme au non-hydrostatisme (200?)

En effet, bien que les concepts de base puissent être expliqués assez simplement comme par exemple dans la suite, les conséquences globales sur la modélisation sont importantes et en définitive, un modèle NH est beaucoup plus complexe qu'un modèle H. Le passage de modèles H à NH en PN est donc une tâche importante qui nécessite un effort significatif tant sur le plan technique que scientifique.

LES EQUATIONS DE BASE

En fait le premier contact avec les concepts d'hydrostatisme et de non-hydrostatisme peut se faire en ne considérant que ce qui se passe le long de la direction verticale, ce qui simplifie largement le probème. on va donc essayer ici d'obtenir une compéhension intime

en établissant tout d'abord l'équation qui régit le mouvement vertical d'une particule d'air.
On appelle "particule d'air", une boite d'air très petite qui garde son intégrité mais qui se déplace avec le reste de l'atmosphère (une bonne image est donc un bulle de savon très petite).
La distinction entre l'H et le NH est essentiellement liée à ce qui se passe sur la verticale, c'est à dire aux forces verticales qui agissent sur les particules d'air. De plus on peut négliger toutes les autres forces pour n'en retenir que deux:

- La force de pesanteur
- La résultante de la composante verticale des forces de pression

Par exemple on peut négliger la force de Coriolis ou les forces de frottement, etc... pour comprendre la différence entre H et NH.

L'équation du mouvement vertical

on veut trouver comment notre particule va accélérer verticalement en fonction de l'environnement atmosphérique, lorsqu'elle est soumise aux deux forces retenues ici. On suppose une particule cylindrique comme sur la Fig. **??** pour simplifier le raisonnement, mais cela ne change en rien les résultats finaux.
On appelle z la coordonnée verticale hauteur avec $z = 0$ au sol et z croissant vers le haut. On appelle ds la surface de la particule, dz sa hauteur, dv son volume et dm sa masse. Ces quantités sont toutes très petites. On note ρ sa masse volumique:

$$\rho = \frac{dm}{dv}$$

La force de pesanteur est

$$f_g = -g.dm$$

Le signe "-" indique que la force est dirigée vers le bas, donc a l'opposé de l'axe des z.

La force de pression totale est la résultante des deux forces de pression qui s'appliquent à la base et au sommet de la particule. Par définition, les forces de pression sont égalés au produit de la pression par la surface. A la base, on a donc une force vers le haut égale au produit de la pression par la surface de la base de la particule:

$$f_{\text{base}} = p_{\text{base}}.ds$$

Au sommet, on a une force vers le bas:

$$f_{\text{sommet}} = -p_{\text{sommet}}.ds$$

La résultante est donc $f_p = (p_{\text{base}} - p_{\text{sommet}}).ds$. Comme dz est très petit, on estime la variation de pression au moyen de la dérivée: $(p_{\text{sommet}} - p_{\text{base}}) = (\partial p/\partial z).dz$. Finalement, la résultante des forces verticales de pression est:

$$f_p = -\frac{\partial p}{\partial z} dz.ds = -\frac{\partial p}{\partial z} dv$$

En réexprimant le volume en fonction de la masse dm et de ρ on obtient donc:

$$f_p = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} dm$$

On sait que l'accélération d'un objet est égale à la résultante des forces qui s'appliquent sur lui divisé par sa masse (Principe de Newton $F = m\gamma$). Donc , si on note w la vitesse verticale de la particule, l'accélération verticale dw/dt sera donnée par:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{dm}\left(f_g + f_p\right)$$

soit:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{dm}\left[-g.dm - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.dm\right]$$

Finalement:

$$\frac{dw}{dt} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{1}$$

C'est l'équation verticale du mouvement pour la particule soumise à ces deux forces.

Signification physique

On voit que les mouvements verticaux des particules obeissent à une loi relativement simple: l'accélération verticale est donnée par la résultante de la force de gravité et de la force liée au gradient vertical de pression.

Si le fluide est au repos, ou n'a pas de mouvement vertical (ex. vent régulier sur un plaine), alors on a $\dot{w} = 0$ ce qui signifie que le gradient vertical de pression doit compenser exactement la force de gravité. Dans ce cas on a donc:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \qquad\qquad (\text{si } \dot{w} = 0)$$

Inversement, si le profil vertical de pression ne vérifie pas l'équation ci-dessus, il y a un déséquilibre entre la force de pression et la gravité, alors la particule est accélérée vers le haut ou vers le bas.

QU'EST-CE QUE LA PRESSION DANS L'ATMOSPHERE ?

c'est une question fondamentale, à laquelle il faut répondre avec le plus grand soin avant de pouvoir continuer, car il y a possibilité d'idées fausses qu'il faut tout de suite écarter

sous peine de ne pas pouvoir comprendre la suite. On entend souvent dire par exemple que la pression au sol, c'est le poids de l'air qu'on a au-dessus de notre tête. Ceci est généralement faux comme nous le verrons dans les sections suivantes.
Tout d'abord, il faut se souvenir que l'atmosphère est un gaz. La notion de pression dans un gaz a été inventée pour rendre compte de la force exercée par ce gaz sur les parois d'un hypothétique récipient rigide (par exemple un bouteille de verre) qui le contiendrait. On s'est aperçu que plus on mettait dans gaz dans le récipient et plus on le chauffait, plus les parois étaient soumises à une force importante, et ce de manière à peu près proportionnelle. On est alors arrivé à la loi des gaz parfaits qui définit phénoménologiquement la pression comme le produit de la température et de la densité (ou masse volumique). C'est la définition qui va nous intéresser. Si la proportionalité est exacte on dit que le gaz est parfait. C'est vérifié avec une grande précision dans l'air, et nous supposerons donc désormais que nous avons un gaz parfait.
Plus tard on a trouvé une signification physique encore plus fine à la force de pression, comme étant la force exercée par les molécules de gaz qui choquent la paroi du récipient. Plus la densité de particules est grande plus la force est grande. De même la température étant un mesure de la vitesse des particules, plus la température est grande, plus la force exercée lors des chocs est grande. Cette explication physique au niveau des molécules, encore plus précise, ne nous servira pas dans la suite.
Donc pour nous, on garde cette idée que la pression dans un gaz est la force exercée sur un récipient rigide qui la contiendrait, et cette pression peut être calculée en connaissant la densité ρ et la température T. Comme le gaz est parfait on a la proportionnalité et donc:

$$p = \rho R T$$

où R est un constante (dite "constante des gaz parfaits de l'air sec").

Petite digression sur la mesure de la pression

Maintenant, si on veut mesurer la pression d'un gaz avec ces définitions, ce n'est pas facile. Tout d'abord, on pourrait essayer de mesurer la température du gaz et sa densité pour en déduire sa pression, mais la mesure de la densité est réellement une tâche difficile. Il faut peser le récipient plein de gaz, puis le vider, puis le repeser, et connaissant son volume on en déduit ρ. Ce n'est pas impossible, mais cela reste assez laborieux (vider TOTALEMENT un récipient est une activité très difficile) et en plus il faut manipuler le gaz donc lorsqu'on connait sa pression, le gaz n'est plus à sa place originelle.
En fait on utilise plutôt l'autre définition de la pression comme force exercée sur les parois du récipient, mais en fait on va utiliser un récipient non pas rigide mais déformable. Pour mesurer la pression d'un gaz, on le met donc dans ce récipient, en remarquant que lorsque le récipient cesse de se déformer, alors tout se passe comme si il était rigide. Mais on utilise des récipients pour lesquels on connait la manière dont ils se déforment en fonction de la force qu'il subissent. Ainsi, en mesurant la déformation du récipient, on peut connaître, après calibration, la pression du gaz à l'intérieur.

Mais il faut bien se rendre compte que ce que l'on va mesurer ainsi c'est la **différence** de pression entre le gaz et l'atmosphère qui environne le récipient déformable. Car maintenant que le récipient est déformable, la force de pression est exercée à l'intérieur par le gaz, et à l'extérieur par l'atmosphère.
Pour la mesure de la pression atmosphérique, on utilise alors cette nouvelle propriété intéressante. On enferme définitivement dans le récipient une certaine quantité de gaz, et on calibre l'appareil en lui appliquant une pression connue et en inscrivant les graduations correspondantes. Une capsule semi-rigide avec un ressort dedans est reliée à une aiguille. En pratique pour que les variations de volume soient maximales, il vaut mieux faire un assez bon vide dans la capsule.
Le baromètre à mercure est une application encore plus simple du même principe, mais ici, c'est le poids de la colonne de mercure qui compense la pression atmosphérique.
Néanmoins, il ne faut pas perdre de vue que la mesure au moyen de manomètres, baromètres et autres tubes Pitot, aboutit toujours à une mesure de la pression définie comme ci-dessus par la loi des gaz parfaits ou comme force résultant de l'impact des molécules sur une surface.
On voit que la définition de la pression est quelque chose de tout à fait local qui ne fait intervenir que la densité des particules et leur agitation, et que, a priori, cela ne possède pas de relation avec un concept défini de manière non-locale comme la masse d'une colone d'air au dessus de notre tête. Nous préciserons ces différences dans la section "qu'est-ce que le non-hydrostatisme".

QU'EST-CE QUE L'HYPOTHESE HYDROSTATIQUE ?

L'hypothèse hydrostatique repose sur une remarque judicieuse: dans l'atmosphère, les mouvements "violents" sur la verticale ne se produisent qu'à petite échelle. On appelle mouvement violents ceux pour lesquel l'accélération verticale n'est pas totalement négligeable devant g. A grande échelle, c'est-à-dire, en considérant des "particules" d'air qui ont des surfaces de plusieurs milliers de kilomètres carrés, les mouvements de ces particules sont extrêmement calmes sur la verticale.
On peut se convaincre de la réalité de l'argument ci-dessus en remarquant que à grande échelle, les mouvements verticaux intenses concernent toujours l'intégralité de l'épaisseur de la troposphère. Alors si on suit une particule prise dans un mouvement vertical, elle doit partir grosso-modo du bas de l'atmosphère et terminer vers la tropopause. On suppose alors que le mouvement est relativement régulier (par exemple que la particule décrit un mouvement circulaire uniforme sur la verticale). Si on appelle $w_{\max}$ la vitesse verticale maximale qu'elle atteint (probablement vers 500 hPa), alors une bonne approximation du temps minimal qu'elle mettra à parcourir l'épaisseur de la troposphère est donc $t =$

$H/w_{\max}$. Alors l'ordre de grandeur de son accélération verticale peut être estimé par $\dot{w} \simeq w_{\max}/t = w_{\max}^2/H$ car w part de zero au sol pour arriver à $w_{\max}$ au milieu de la troposphère. Par exemple à des échelles de 10-20 km, les vitesses verticales atteignent au plus 1 m/s, ce qui donne une accélération verticale de 0.0001 m/s^2 ce qui est totalement négligeable devant $g \simeq 10$ m/s^2. En revanche, si les vitesses verticales peuvent atteindre 10 m/s alors on peut arriver à des accélérations verticales non négligeables devant g. ceci est encore plus vrai si en plus l'accélération n'est pas régulièrement répartie sur l'épaisseur de la troposphère, mais que le mouvement présente des à-coups à certains niveaux.
Dans un modèle numérique, les particules sont évidemment les boites élémentaires (les mailles) où l'on fait chaque calcul. Si l'accélération verticale de ces particules est faible devant g, alors on peut la négliger dans l'équation du mouvement vertical (1) et faire ainsi l'hypothèse hydrostatique. On obtient donc:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

Physiquement, cette équation nous dit que il n'y a pas d'accélérations sur la verticale et donc, que la force verticale de pression doit compenser exactement la force de gravité. Cela a des conséquences profondes sur la plupart des autres équations du système, et apporte de grandes simplifications à plusieurs points de vue que nous ne pouvons pas développer de manière simple ici.
Du point de vue vertical, il y a une conséquence importante qui n'apparaît pas à première vue. Supposons une colonne d'air de surface dS constante avec l'altitude, alors:

$$p_{\text{sol}} = -\int_0^\infty \rho g dz = -g\int_0^\infty \rho dz = -g(M/dS)$$

où M est la masse de la colonne d'air entière. En conséquence, la pression au sol devient égale au poids d'une colonne d'air divisé par sa surface. Mais il faut bien voir que ceci n'est vrai que dans le cas où l'hypothèse hydrostatique est appliquée.
Ceci explique peut-être la confusion qui est parfois faite entre pression atmosphérique et poids de la colonne d'air, car il est vrai que depuis le début de la prévision manuelle puis numérique, l'hypothèse hydrostatique a toujours été sous-jacente, et donc les deux concepts (pression et poids) ont toujours été intimemement liés dans l'esprit des météorologistes. Néanmoins, il faut réaliser que cette identité des deux concepts n'est valable que dans le cadre restreint de l'hypothèse hydrostatique, et il faut l'abandonner lorsque l'on utilise des sytèmes non-hydrostatiques.

QU'EST-CE QUE LE NON-HYDROSTATISME ?

Comme dirait La Palisse, c'est la conservation de l'équation du mouvement vertical sous sa forme complète sans faire l'hypothèse hydrostatique. Les considérations ci-dessus nous

invitent à penser que relaxer l'hypothèse hydrostatique n'apportera un changement dans les résultats d'une prévision que si cette hypothèse est érronée, donc uniquement si des fortes accélérations verticales peuvent effectivement se produire aux échelles prévues.
Dans cette section on examine les propriétés des systèmes non-hydrostatiques, c'est à dire ceux qui retiennent l'équation complète du mouvement vertical.
Dans ce cas la pression au sol n'est plus égale à la masse d'une colonne d'air de surface unitaire, car on a:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g - \dot{w}$$

Néanmoins, on peut toujours s'amuser à **définir** en chaque point du gaz une quantité π par la relation suivante:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \pi}{\partial z} = -g$$

en supposant que π s'annule lorsque z tend vers l'infini.
Pour cette quantité π, on a la même équation que ce que l'on avait pour la pression dans le cas où l'on faisait l'hypothèse hydrostatique. En particulier la valeur au sol π_{sol} de cette quantité est égale à la masse d'une colonne d'air unitaire:

$$\pi_{\mathrm{sol}} = -g(M/dS)$$

On décide de **baptiser** la quantité π du nom de "pression hydrostatique". On voit qu'en chaque point du gaz, on peut définir la pression vraie p basée sur les forces exercées sur des parois, mais aussi la pression hydrostatique, basée sur la masse de gaz située au-dessus.
L'examen local des propriétés du gaz permet (via ρ et T par exemple) de connaître la pression p, en revanche, la connaissance de π nécessite de connaître les propriétés de gaz sur toute la colonne atmosphérique.
Lorsque l'on fait une mesure avec un baromètre, c'est la pression vraie que l'on mesure car l'on mesure indirectement la force exercée par les molécules sur les parois du capteur. Par contre, bien que la quantité π soit parfaitement définie, il n'existe, à notre connaissance, aucun capteur capable de la mesurer: on ne peut donc la connaître expérimentalement.
On peut alors définir la déviation de pression par rapport à l'hydrostatisme par:

$$p' = p - \pi$$

C'est donc la part de la pression vraie p qui n'est pas égale au poids de la colonne située au-dessus.
On peut alors donner une nouvelle définition de l'hypothèse hydrostatique:
L'hypothèse hydrostatique revient à négliger la déviation de pression hydrostatique p' devant la pression hydrostatique π.

QUELQUES EXEMPLES SIMPLES D'ECOULEMENTS NON-HYDROSTATIQUES

Ici on se propose de montrer quelques exemples simples de situations concrètes où les phénomènes NH jouent un rôle important. On dit que les écoulements correspondant sont non-hydrostatiques, car on ne peut pas les représenter avec un système hydrostatique (soit le résultat obtenu est faux, soit le modèle devient instable).

Aile d'avion

L'écoulement NH le plus évident qui vient àl'esprit est celui généré autour d'une aile d'avion. Ici, les phénomènes non-nydrostatiques deviennent tellement forts qu'il sont du même ordre de grandeur que la partie hydrostatique (p' est du même ordre de grandeur que π). Evidemment, cela n'a pas grand chose à voir avec la météorologie, mais après tout, les équations de l'atmosphère sont aussi valables pour les écoulements aérodynamiques. Cet exemple est toutefois très instructif pour saisir la différence entre p et π.

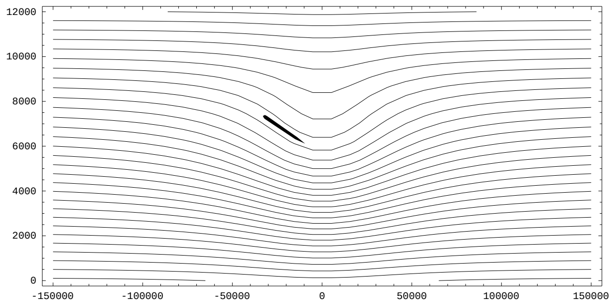

FIG. 1: Ecoulement autour d'une aile d'avion

Tout d'abord, il faut remarquer que le passage de l'avion ne modifie pas sensiblement la quantité d'air contenue dans la colonne d'air qu'il traverse. Il n'y a donc pas de modification appréciable du champ de pression hydrostatique au sol π_s lors du passage de l'avion. On peut dire que l'avion écarte un peu verticalement les lignes de flux de l'air autour de lui, mais ne change pas la masse de l'atmosphère.

On peut même aller plus loin et dire que l'avion modifie très peu le champ local de pression hydrostatique π. En négligeant les effets latéraux, le seul effet qui modifie la pression hydrostatique, c'est le fait que le champ de densité est sensiblement modifié au voisinage de l'avion. Sur la figure ci-dessus, la densité est augmentée là où les lignes de flux sont resserrées et vice-versa. Mais cette modification de la densité n'a qu'un effet indirect sur la modification du champ π car elle ne change que la **dérivée** de la pression hydrostatique.

par exemple dans la plus extême des situations, si la pression p venait à s'annuler complètement sur l'extrados de l'aile, la pression hydrostatique cesserait simplement d'augmenter lorsque z décroît, alors que la pression p deviendrait fortement décroissante lorsque z décroît comme le montre la figure suivante.

FIG. 2:

blabla