

CNRM-GAME
Centre National de Recherches Météorologiques
GMAP
Groupe de Modélisation en Assimilation pour la Prédiction
sous la direction de
Fabrice Voitus & Pierre Bénard

Analyse de stabilité des schémas HEVI dans la dynamique non-hydrostatique d'AROME.

Charles Colavolpe

Toulouse, printemps 2013

Remerciements

Météo-France est l'organisme français de météorologie qui a à sa charge plusieurs missions variées comme assurer la sécurité météorologique (carte des vigilances, sécurité en mer et en montagne, risque de feux de forêt, canicules ou grands froids, qualité de l'air...) le suivi des pollutions maritimes ou atmosphériques (comme les cendres volcaniques) ainsi que développer les connaissances scientifiques liées au climat. Le CNRM (Centre National de Recherches Météorologiques, associé à Météo-France et au CNRS) assure la plus grande partie des activités de recherche. En son sein, le GMAP (Groupe de Modélisation et d'Assimilation pour la Prévision) est chargé de développer les modèles de prévision numérique du temps de Météo-France. En plus de son activité de recherche et de développement en prévision numérique, le GMAP est engagé dans la recherche fondamentale, notamment sur la physique des phénomènes atmosphériques, l'utilisation des données satellitaires et les techniques pour l'assimilation de données. C'est dans ce cadre que j'ai effectué mon stage sous la direction de Fabrice Voitus et Pierre Bénard.

Je remercie M. Alain Joly, directeur du GMAP pour m'avoir accueilli dans son service ainsi que l'ensemble des membres de l'équipe pour leur grande qualité d'écoute et d'intégration. Je remercie Pierre Bénard, pour sa pédagogie et sa disponibilité. Un immense remerciement à mon maître de stage Fabrice Voitus pour tout ce qu'il m'a apporté, en volume de connaissances, en rigueur dans les méthodes de travail, et surtout pour le goût de la recherche qui l'anime et qui m'a touché.

Cette expérience a été très enrichissante, et que tous les acteurs qui y ont participé soient assurés de ma profonde reconnaissance.

Table des matières

1	Description du modèle	6
1.1	Les équations du système	6
1.2	Contraintes numériques	7
2	Méthodes time-splitting	10
2.1	Présentation de la méthode pour AROME	10
2.2	Filtre de Williams	12
2.3	Filtre amortissant de Klemp	17
2.4	Schémas alternatifs	18
3	Méthodes IMEX	20
3.1	Présentation de la méthode pour AROME	20
3.2	Stabilité des modèles envisagés	23

Introduction

Pour être capable de prédire le comportement de l'atmosphère, il faut avoir une base théorique constituée de différentes variables représentant les caractéristiques du temps, et un système d'équations modélisant sa dynamique qui est construit à partir de plusieurs branches de la physique comme la dynamique des fluides ou la thermodynamique. À l'heure actuelle, comme les outils des mathématiques fondamentales ne sont pas adaptés pour résoudre de manière exacte ces équations, il nous faut également des méthodes numériques pour faire des approximations de ces solutions. Face à ces faiblesses, l'ambition de prédire l'ensemble de l'évolution du temps doit être revue à la baisse, c'est pourquoi il existe différents modèles pour différentes échelles. De plus, comme les méthodes numériques sont fortement dépendantes des outils informatiques sur lesquels elles sont utilisées, la précision sur ces approximations ne peut être aussi grande que l'on veut, et elles doivent respecter un équilibre, sans cesse remis en cause, entre la qualité exigée et le temps de calcul de la machine lui-même soumis au nombre de calculs à effectuer, le temps de chacun d'entre eux, et le volume des communications entre les processeurs à effectuer.

L'un des modèles utilisé par Météo-France est AROME, Application de la Recherche Opérationnelle à Mésos-Échelle. Il cherche donc à représenter et à calculer le plus fidèlement possible l'évolution du temps sur une échelle intermédiaire entre la circulation planétaire (comme les dépressions ou les anticyclones) et les systèmes à très petites échelles de moins de 2 km de diamètre. C'est pour cela que sa résolution est de 2,5 km sur une aire limitée. Le système qu'il tente de résoudre est celui des équations d'Euler pleinement compressibles et non-hydrostatique (EE). Ce dernier supporte plusieurs types d'ondes qui envolent à des vitesses très différentes. Il y a donc une première contrainte due à la vitesse du son (proche 300 m.s^{-1}) très rapide par rapport aux autres processus. De plus, par le caractère non-hydrostatique du problème, il existe une contrainte discrète qui impose une résolution verticale beaucoup plus importante que la résolution horizontale. Pour pallier à la première difficulté, une idée est d'utiliser des modèles filtrant, c'est-à-dire dans lesquels les ondes acoustiques ne sont pas présentes. Cette hypothèse a été écartée car nous souhaitons résoudre le système d'Euler complet car c'est celui qui aujourd'hui modélise le mieux la dynamique du temps. Une autre idée pour s'affranchir des deux contraintes est d'utiliser des méthodes semi-implicites. Actuellement utilisées par plusieurs centres de prévision numérique (Météo-France, ECMWF), ces méthodes très efficaces nécessitent néanmoins la résolution d'une équation elliptique 3D pour laquelle il n'y a pas de méthode scalable. Ceci crée une réelle inquiétude car l'évolution des calculateurs, qui sont massivement parallèles avec une mémoire distribuée, implique que les améliorations sur la puissance de calcul est assortie de son lot de communications supplémentaires. Cette combinaison de facteurs fait peser un réel risque sur la durabilité des algorithmes actuellement utilisés. Il est important d'anticiper cette évolution pour utiliser de manière optimale ces futures architectures, sous peine de remettre en cause les méthodes semi-implicites.

L'un des modèles utilisé par Météo-France est AROME, Application de la Recherche Opérationnelle à Mésos-Échelle. Il cherche donc à représenter et à calculer le plus fidèlement possible l'évolution du temps sur une échelle intermédiaire entre la circulation planétaire (comme les dépressions ou les anticyclones) et les systèmes à très petites échelles de moins de 2 km de diamètre. C'est pour cela que sa résolution est de 2,5 km sur une aire limitée. Le système qu'il tente de résoudre est celui des équations d'Euler pleinement compressibles et non-hydrostatique (EE). Ce dernier supporte plusieurs types d'ondes qui envolent à des vitesses très différentes. Il y a donc une première contrainte due à la vitesse du son (proche 300 m.s^{-1}) très rapide par rapport aux autres processus. De plus, par le caractère non-hydrostatique du problème, il existe une contrainte discrète qui impose une résolution verticale beaucoup plus importante que la résolution horizontale. Pour pallier à la première difficulté, une idée est d'utiliser des modèles filtrant, c'est-à-dire dans lesquels les ondes acoustiques ne sont pas présentes. Cette hypothèse a été écartée car nous souhaitons résoudre le système d'Euler complet car c'est celui qui aujourd'hui modélise le mieux la dynamique du temps. Une autre idée pour s'affranchir des deux contraintes est d'utiliser des méthodes semi-implicites. Actuellement utilisées par plusieurs centres de prévision numérique (Météo-France, ECMWF), ces méthodes très efficaces nécessitent néanmoins la résolution d'une équation elliptique 3D pour laquelle il n'y a pas de méthode scalable. Ceci crée une réelle inquiétude car l'évolution des calculateurs, qui sont massivement parallèles avec une mémoire distribuée, implique que les améliorations sur la puissance de calcul est assortie de son lot de communications supplémentaires. Cette combinaison de facteurs fait peser un réel risque sur la durabilité des algorithmes actuellement utilisés. Il est important d'anticiper cette évolution pour utiliser de manière optimale ces futures architectures, sous peine de remettre en cause les méthodes semi-implicites.

Les schémas de type *Horizontally Explicit and Vertically Implicit* (HEVI) semblent être une réponse à ce défi.

Contrairement aux idées déjà formulées pour faire face aux contraintes du modèle, le HEVI s'affranchit de la seconde contrainte, en traitant de manière implicite la direction la plus exigeante (la verticale) et le reste de manière plus locale (donc explicite) pour avoir un solveur le plus léger à résoudre et accepte la présence des ondes acoustiques dictée par la première contrainte. Ainsi, le pas de temps maximal pour s'assurer de la stabilité est fixé par le nombre de Courant (CFL) qui dépend de la vitesse du son et de la résolution horizontale. Grâce à ses avantages, le HEVI a été souvent utilisé dans le contexte opérationnel des modèles de prévision numérique qui nécessite d'avoir pour une qualité donnée, le minimum de calcul à effectuer et de variables à stocker. Cette famille de méthode regroupe au moins deux sous-familles différentes que nous allons étudier dans le cas des équations d'Euler : le *time-splitting* et le *Implicit-Explicit* (IMEX). Nous allons donc décrire ces deux principes, et tester la stabilité de ces schémas dans le cas des équations d'AROME afin ouvrir des pistes de réflexion ce type de schéma.

Dans une première partie, nous allons définir le modèle utilisé dans AROME et définir le cadre de travail. Nous allons passer en revue l'ensemble des possibilités des méthodes time-splitting dans une seconde partie, sélectionner les meilleurs candidats, et étudier leurs stabilités. Nous ferons le même travail pour les schéma IMEX dans une troisième partie afin de pouvoir tout comparer.

1 Description du modèle

1.1 Les équations du système

Les systèmes d'équations couramment employés en météorologie découlent des lois de la mécanique des fluides :

- principe fondamental de la dynamique
- conservation de la masse
- conservation de l'énergie thermique
- loi d'état des gaz

Lesquels se traduisent respectivement par l'équation de la quantité de mouvement, l'équation de continuité, l'équation de la thermodynamique, et l'équation d'état. L'atmosphère est assimilée à une pellicule mince subissant les effets de la gravité supposée constante. De plus, on suppose que l'atmosphère est un gaz parfait non-visqueux. L'ellipticité de la Terre est négligée. Les variables d'état de l'atmosphère sèche (sans condensats) sont : le vecteur vent horizontal $\mathbf{V}$, la composante verticale du vent w , la température T , la pression p , et la densité ρ , obéissent aux équations du système d'Euler compressible (EE) qui en coordonnées cartésiennes (x, y, z) se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{V} + \frac{1}{\rho}\nabla_z p - f\mathbf{k} \times \mathbf{V} &= \mathbf{F}_H \\ \frac{d}{dt}w + g + \frac{1}{\rho}\partial_z p &= F_v \\ \frac{d}{dt}T + \frac{RT}{C_p}D_3 &= \frac{Q}{C_v} \\ \frac{d}{dt}\rho + \rho D_3 &= 0 \\ p &= \rho RT\end{aligned}$$

$\mathbf{F}_H$, F_v , représentent la contribution des forces de friction et Q représente le terme de chaleur reçue par le système. Ces derniers termes seront ignorés dans cette étude. Il en est de même pour les termes de Coriolis représentés par f . g est la constante d'accélération de la pesanteur ($g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$), C_p et C_v sont les capacités thermiques à pression et à volume constant (en J.K^{-1}). Comme on suppose que l'air est un gaz parfait sec, avec la constante d'état $R = 8,314472 \text{ J.K}^{-1}$. D_3 désigne la divergence tridimensionnelle du vent.

Actuellement largement employé dans le noyau dynamique des modèles de recherches météorologiques et dans certains modèles de *Prévision Numérique du Temps* (PNT) comme AROME, le système (EE) est par excellence le système le plus complet et approprié pour simuler et prévoir les phénomènes de méso-échelles. Il supporte toutes les ondes présentes dans l'atmosphère, dont certaines sont beaucoup plus rapides que les autres. C'est pourquoi, nous pouvons voir le système initial comme étant la somme de deux parties chacune liée aux vitesses d'évolutions des phénomènes qu'ils décrivent.

$$\partial_t X = \mathcal{F}(X) + \mathcal{S}(X) \quad (1)$$

avec $\mathcal{F}$ (pour *fast*) désignant l'ensemble des processus rapides du système et $\mathcal{S}$ (pour *slow*) sa partie lente.

Ce système est *raide* dans le sens où la partie rapide rend les méthodes d'approximations numériques des solutions de type explicites trop peu efficaces (voir totalement inévitable). C'est pourquoi il est courant d'employer le système des équations primitives hydrostatiques (HPE) qui filtre les ondes acoustiques peu influentes sur la dynamique du climat et atténue le caractère raide du système. Il repose sur l'hypothèse dite *d'équilibre hydrostatique* qui consiste à négliger l'accélération verticale du mouvement devant accélération gravitationnelle, (i.e $\frac{d}{dt}w \ll g$), supposant de ce fait un équilibrage parfait entre la force de pression verticale et le poids de la masse d'air. Ce système d'équations est pertinent pour simuler les mouvements de l'atmosphère dont l'échelle spatiale est supérieure à une dizaine de kilomètres.

Nous allons écrire le système d'Euler pour une seule dimension horizontale et la verticale en coordonnées hybrides η généralisant les coordonnées hydrostatiques et définies par Laprise [16]. L'évolution des grandeurs physiques sera évaluée par les variables de vent horizontale V , la divergence verticale d du vent verticale w , la température T ainsi qu'une pression adimensionnée q et la pression hydrostatique de surface π_s . Les autres grandeurs (w , la pression p et le géopotential ϕ) peuvent être exprimée par des relations diagnostiques :

$$\begin{aligned} p &= \pi e^q \\ m &= \partial_\eta \pi \\ \phi &= \phi_s + \int_\eta^1 \frac{mRT}{p} d\eta' \\ w &= w_s + \int_\eta^1 \frac{mRTd}{gp} d\eta' \end{aligned}$$

Enfin, nous définissons pour conclure la divergence total du vent D_3 ainsi que la valeur du transport de la pression hydrostatique π

$$\begin{aligned} D_3 &= \nabla V + d + \frac{p}{mRT} \nabla \phi \partial_\eta V \\ \dot{\pi} &= V \nabla \pi - \int_0^\eta \nabla(mV) d\eta' \end{aligned}$$

Le système complet se met sous la forme :

$$\frac{d}{dt} V + \frac{RT}{p} \nabla p + \frac{1}{m} \partial_\eta p \nabla \phi = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} d + \frac{g^2 e^q}{RT} \frac{\pi}{m} \partial_\eta \left[\frac{1}{m} \partial_\eta (\pi(e^q - 1)) \right] - g \frac{p}{mRT} \partial_\eta V \nabla w - d(\nabla V - D_3) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} T + \frac{RT}{C_v} D_3 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} q + \frac{C_p}{C_v} D_3 + \frac{\dot{\pi}}{\pi} = 0 \quad (5)$$

$$\partial_t \pi_s + \int_0^1 \nabla(mV) d\eta' = 0 \quad (6)$$

Les conditions aux limites supérieures et inférieures sont généralement supposées *rigides* :

$$\dot{\eta}(0) = 0 \quad (7)$$

$$\dot{\eta}(1) = 0 \quad (8)$$

1.2 Contraintes numériques

Pour approcher la solution de ce système, nous allons mettre en place plusieurs schémas numériques qui doivent être *convergers* (ie : être à la fois *consistants* et *stables*, au sens de P.Lax). Un schéma est consistant si, lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro, il décrit correctement les opérateurs discret qu'il est sensé représenter. La stabilité du schéma est quand à elle fortement dépendante à la fois du système à résoudre, ou plus précisément, de la vitesse d'évolution de ses phénomènes les plus rapides, ainsi que la résolution du domaine. Dans le système d'Euler compressible supporte quatres phénomènes :

- les ondes de Rossby
- l'advection
- les ondes d'inerties-gravités
- les ondes acoustiques

Pour mettre en évidence ces dernières ondes, il suffit de modifier le système, en ne se préoccupant que de l'évolution de petites perturbations négligeables devant un état d'équilibre (supposé hydrostatique, au repos et avec une température uniforme T^*). En notant X l'ensemble des variables, X^* l'état de référence et X' les perturbations $X - X^*$, les équations deviennent donc :

$$\partial_t V' + R\mathcal{G}\nabla T' + RT^*(\mathbf{I} - \mathcal{G})\nabla q' + RT^*\nabla q'_s = 0 \quad (9)$$

$$\partial_t d' + \frac{g^2}{RT^*}\pi\partial_\pi[\partial_\pi(\pi q')] = 0 \quad (10)$$

$$\partial_t T' + \frac{RT^*}{C_v}(\nabla V' + d') = 0 \quad (11)$$

$$\partial_t q' + \frac{C_p}{C_v}(\nabla V' + d') - \mathcal{S}\nabla V' = 0 \quad (12)$$

$$\partial_t q'_s + \mathcal{N}\nabla V' = 0 \quad (13)$$

avec les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\psi &= \int_0^1 m\psi d\eta' \\ \mathcal{S}\psi &= \frac{1}{\pi} \int_0^\eta \psi d\eta' \\ \mathcal{G}\psi &= \int_\eta^1 \frac{m}{\pi} \psi d\eta' \\ \tilde{\partial}\psi &= \frac{\pi}{m} \partial_\eta \psi \end{aligned}$$

En utilisant a propriété suivants sur les opérateurs :

$$\mathcal{G}\mathcal{S} - \mathcal{G} - \mathcal{S} + \mathcal{N} = 0$$

et en dérivant les équations linéarisées, nous avons une équation *de structure*, (car elle définit la structure spatio-temporelle des modes propres du système au voisinage de l'état de base) qui s'apparente à une composition de deux équations d'ondes d'Alembert :

$$\left[-\frac{1}{c_*^2} \partial_t^4 + \left(\Delta + \frac{\tilde{\partial}(\tilde{\partial} + \mathbf{I})}{H_*^2} \right) \partial_t^2 + N_*^2 \Delta \right] w' = 0 \quad (14)$$

avec c_* la vitesse du son dans un gaz parfait à température T^* ($c_*^2 = \frac{C_p}{C_v} RT^*$), N_* la fréquence de Brunt-Väisälä ($N_*^2 = \frac{g^2}{C_p T^*}$) et $H^* = \frac{RT^*}{g}$ une hauteur.

Pour avoir les relations de dispersions de chacune de ces ondes, il suffit de considérer les cas limites résumés dans le tableau ci-après :

Onde	Conditions	Propriété
acoustique verticale	$k = 0 \mid N_* = 0$	$\omega^2 = \frac{c_*^2}{H_*^2} \left(\nu^2 + \frac{1}{4} \right)$
gravité « oblique »	$\nu = 0 \mid \frac{1}{4H_*^2} \ll k^2 \mid c_* \rightarrow \infty$	$\omega^2 = N_*^2$
gravité horizontale	$\nu = 0 \mid k^2 \ll \frac{1}{4H_*^2} \mid c_* \rightarrow \infty$	$\omega^2 = 4H_*^2 k^2 N_*^2$
acoustique horizontale	$\nu = 0 \mid \frac{1}{4H_*^2} \ll k^2 \mid N_* = 0$	$\omega^2 = c_*^2 k^2$

Maintenant que nous avons mise en évidence l'ensemble des phénomènes du modèle, nous allons pouvoir regarder la stabilité des méthodes numériques en considérant les nombres de *Courant* de chacun des phénomènes du modèle. En notant Δt le pas de temps utilisé, et Δx et Δz la taille des mailles horizontales et verticales du domaine, on a :

$$\mu = \max(\mu_{u_x}; \mu_{u_z}; \mu_{c_x}; \mu_{c_z}) = \max\left(\frac{U\Delta t}{\Delta x}; \frac{w\Delta t}{\Delta z}; \frac{c_*\Delta t}{\Delta x}; \frac{c_*\Delta t}{\Delta z}\right)$$

La condition (dite *CFL*) pour qu'un schéma explicite soit stable est :

$$\mu < \text{Cte}$$

Comme la vitesse du son est la plus élevée, et que la représentation des phénomènes comme la convection nous impose une forte résolution verticale, la condition CFL pour les schémas est fonction du nombre de Courant de la propagation des ondes acoustique verticale. Pour alléger ces conditions de stabilité trop strict, certains modèles font d'autres hypothèses sur le modèle pour ne pas représenter ces ondes (système anélastique pour Meso-NH ou système hydrostatique pour ARPEGE). AROME s'affranchit totalement de ces contraintes en mettant en œuvre des méthodes implicites. Néanmoins, elle nécessite la résolution d'une équation d'*Helmholtz* dans tout l'espace et pour lequel il n'existe que des méthodes numériques globales. Or, comme ces algorithmes sont exploités par des calculateurs massivement parallèles à mémoire distribuée, les méthodes non-locales imposent donc des communications entre les processeurs qui diminuent l'efficacité de la parallélisation du code. Ainsi, il est important d'envisager des méthodes plus locales pour augmenter la scalabilité des algorithmes.

L'idée que nous développons ici est de traiter la direction la plus gourmande en communications de manière plus locale (et donc explicite) tout en maintenant le traitement implicite de la direction la plus contraignante, d'après la condition CFL (ie la verticale). C'est la philosophie des méthodes *Horizontally Explicit and Vertically Implicit* (HEVI). Par rapport aux méthodes actuellement utilisées pour AROME, nous perdons donc la très faible condition de stabilité sans pour autant être dans le cas le plus accablant. De plus, nous n'avons qu'un problème d'*Helmholtz* dans une direction, ce qui est plus simple à résoudre. Enfin, ces méthodes déforment moins les ondes orographiques qui ont pourtant une grande importance dans l'évolution du temps.

Dans ce qui suit, nous allons étudier la stabilité de plusieurs schémas HEVI pour le cas du système d'AROME. La méthode d'analyse des schémas est faite par une méthode de Von Neumann dans le cas non-bornés du système linéaire, c'est-à-dire que on utilise les relations suivantes pour éliminer les opérateurs intégraux verticaux pour éliminer les conditions aux bords :

$$\begin{aligned}(\tilde{\partial} + \text{I}) \circ \mathcal{S} &= \mathcal{S} \circ (\tilde{\partial} + \text{I}) = \text{I} \\ \tilde{\partial} \circ \mathcal{G} &= \mathcal{G} \circ \tilde{\partial} = -\text{I} \\ \tilde{\partial} \circ \mathcal{N} &= 0\end{aligned}$$

Le fait de travailler sur le système simple du cas linéaire nous permet de faire ce type d'analyse tout en étant assuré de la présence des ondes acoustiques qui restent le phénomène le plus contraignant pour les méthodes HEVI. Une fois ce modèle en place, nous regardons uniquement la déformation des modes propres du système. D'après l'équation de structure, nous savons que les variables ψ peuvent se mettre sous la forme $\hat{\psi}(t) \exp(ikx) \sigma^{i\nu-1/2}$, avec respectivement k et ν les nombres d'ondes horizontaux et verticaux. En notant $\psi^0 = \hat{\psi}(t)$ et $\psi^+ = \hat{\psi}(t + \Delta t)$, le but de la technique est d'étudier le coefficient de déformation complexe λ tel que $\psi^+ = \lambda \psi^0$. Le schéma est dit stable mais amorti si le coefficient d'amplification $|\lambda|$ est inférieur à un, instable s'il est supérieur à un et neutre s'il est égal à un. La précision du schéma se mesure à l'erreur de phase définie par le rapport entre la vitesse de propagation réelle et l'argument de λ . Cet aspect ne sera pas traité ici, où nous nous concentrons que sur la stabilité. Dans un cas continu, nous avons bien évidemment $\lambda = e^{-i\omega\Delta t}$ ce qui implique une stabilité inconditionnelle et une erreur de phase nulle.

2 Méthodes time-splitting

2.1 Présentation de la méthode pour AROME

Comme pour n'importe quel système dynamique qui se décompose entre une partie lente et une partie rapide, nous pouvons utiliser une méthode de type *time-splitting* pour lequel chaque partie est évaluée avec un schéma différent. Ceci permet d'avoir deux pas de temps ; Δt pour la méthode traitant la partie lente et $\Delta \tau$ pour partie rapide. Comme cette dernière est soumise à une condition CFL plus forte, on peut choisir un pas de temps Δt tel que $\Delta \tau = \Delta t/M$. Ainsi, l'algorithme de ces méthodes repose sur le calcul des petites perturbations du système issues de la partie rapides par le schéma traitant ces phénomènes, tout en injectant une partie seulement du schéma calculant les phénomènes lents. Reste à mettre à jour l'ensemble du système une fois arrivé sur une itération définie par Δt (voir Fig1). Ceci permet d'économiser certains calculs, mais surtout de pouvoir pondérer l'ordre de précision des schémas en fonction de l'importance des phénomènes qu'ils traitent. Dans le cas du système qui nous intéresse, nous pouvons avoir un schéma d'ordre plus élevée pour la partie qui traite l'advection et laisser la partie rapide avec un schéma d'ordre plus faible.

Pour facilité les calculs, la partie rapide $\mathcal{F}$ est évaluée avec un schéma forward-backward pour le vent horizontal et un schéma trapézoïdale pour le reste des variables dans le but d'avoir un schéma neutre (Klemp [14] & Wilhelmson [15], Skamarock & Klemp [23, 24], Wicker & Skamarock [27, 28], Gassmann [9]). Dans le cas du time-splitting, le calcul explicite du vent impose l'utilisation de cette valeur (au temps $\tau + \Delta \tau$) pour calculer les valeurs de température et de pression, sous peine d'avoir un schéma incondionnelement instable (voir Annexe 1). Ce schéma nous permet de nous affranchir de la contrainte sur la direction verticale imposée par la haute résolution, et nous impose une condition de stabilité CFL sur l'horizontale, où la résolution est plus faible. Le choix d'un schéma peu précis et facile à mettre en œuvre est motivé par le fait que ces processus ont un faible impact sur l'évolution du temps.

Reste à savoir comment traiter la partie lente. Il existe deux catégories de schémas numériques, les méthodes *multi-step*, où l'évaluation de l'état suivant utilise plus de deux niveaux de temps (ex : Adams-Bashforth d'ordre $n > 1$, leapfrog), et les méthodes *multi-stage* qui nécessitent le calcul de variables prédictives (ex : Runge-Kutta). Les dernières méthodes de time-splitting utilisent des schémas Runge-Kutta *improved polygon* qui sont d'ordre deux (Wicker [27] et Gassmann [9]) ou trois (Wicker [28]). Elles ont l'avantage d'être précises mais sont instables si elles ne sont pas couplées avec des méthodes de Crowley qui sont des méthodes *forward-in-time* qui nécessitent une discrétisation spatiale de type différence finies *upwind*. Or dans le cadre d'AROME, cette partie est traitée de manière spectrale.

Ainsi, nous allons envisager le time-splitting multi-step dont les calculs des perturbations sur les petits pas de temps se font de la manière suivante :

$$X^{\tau+\Delta\tau} = X^\tau + \Delta\tau \mathbf{F}(X^{\tau+\Delta\tau}; X^\tau) + \frac{1}{M} \underbrace{(X^{t+\Delta t} - X^{t-j\Delta t})}_{\Delta t \mathbf{S}(X^t; X^{t-\Delta t}; \dots; X^{t-k\Delta t})} \quad (15)$$

où j et k sont des entiers définis par la méthode multi-step utilisée (ex : $j = 1, k = 0$ pour le leapfrog et $j = 0, k = 1$ pour le Runge-Kutta-2).

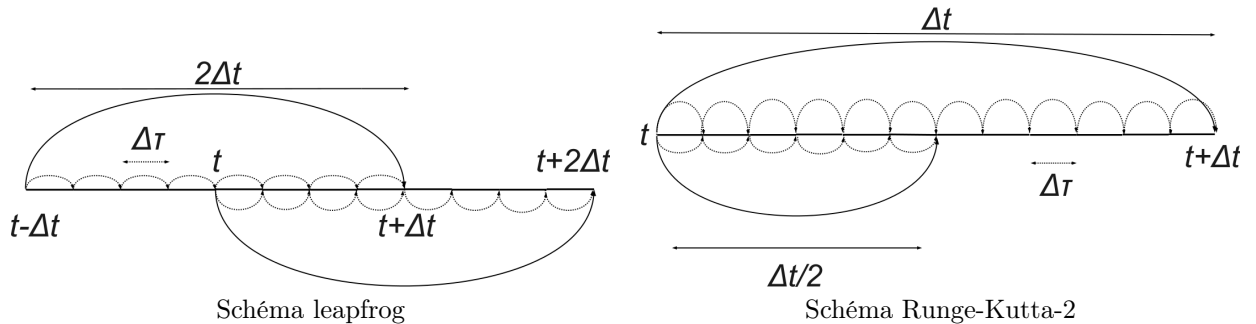


FIGURE 1 – Principe du time-splitting pour plusieurs schémas pour la partie lente

$k = n$ pour les méthodes Adams-Bashforth d'ordre n).

La partie lente est constante durant la période $(j+1)\Delta t$ et l'indice τ varie entre $t-j\Delta t$ et $t+\Delta t$ car, si on néglige la partie rapide, nous retrouvons le calcul de la dérivée temporelle des processus lents :

$$\begin{aligned} X^{t+\Delta t} - X^{t-j\Delta t} &= \sum_{\tau=t-j\Delta t}^{t+\Delta t-\Delta\tau} X^{\tau+\Delta\tau} - X^{\tau} \\ &= (j+1)\Delta t \mathbf{S} (X^t; X^{t-\Delta t}; \dots; X^{t-k\Delta t}) \end{aligned}$$

Ainsi, pour les méthodes directs, la matrice d'amplification $\mathbf{A}$ telle que $Y^{t+\Delta t} = \mathbf{A}^{(j+1)M} \cdot Y^t$, où $Y^t = {}^T (X^{\tau=t-j\Delta t}; \underbrace{X^t; X^{t-\Delta t}; \dots; X^{t-k\Delta t}}_{k+1})$ peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{A} = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0}_{k+1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{k+1} \end{pmatrix} + \Delta\tau \begin{pmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0}_{k+1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{k+1} \end{pmatrix} + \frac{\Delta t}{M} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{S} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{k+1} \end{pmatrix} \right)^{(j+1)M} \quad (16)$$

L'indice des matrices servent à expliciter leurs dimensions.

À la différence des ondes rapides, la partie lente est une composante majeure de l'évolution du climat, c'est pourquoi il est important d'avoir une méthode avec un ordre plus élevée que pour la partie rapide. Initialement, Klemp propose d'utiliser une méthode leapfrog pour évaluer ces processus qui a l'avantage d'être du second ordre et d'avoir qu'un seul mode *computationnel*, c'est à dire, les solutions non-physiques qui sont issues du calcul nécessitant plusieurs niveaux de temps. Or ces modes parasitent la solution recherchée et nécessite donc la mise en place d'un filtre d'Asselin (Asselin [2]) pour amortir ces solutions sans trop amortir la solution physique. Or, comme le remarque Durran [7], ce schéma fait perdre un ordre de précision pour le leapfrog, et accélère la propagation des ondes, ce qui augmente l'erreur de phase. Il propose de mettre en place un schéma Adams-Bashforth d'ordre trois, qui crée deux modes computationnels mais qui tendent très vite vers zéro avec une CFL petite. Néanmoins, Skamarock & Klemp [23] montrent que ce schéma est trop instable pour être utilisé. Plus récemment, Williams [29] [30] propose une généralisation du filtre d'Asselin qui permet de palier la faible précision du Asselin-leapfrog et de retrouver un schéma d'ordre deux dans certain cas. De plus, il conserve la moyenne des variables sur trois pas de temps. Nous proposons donc ici d'étudier l'effet de ce filtre sur la méthode du time-splitting utilisé par le leapfrog (KW78).

Dans un premier temps, considérons le cas simple où aucun filtre n'est utilisé. La stabilité de ce schéma est décrite par les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ (16) et illustrée par la Fig2.

Dans un cas opérationnel, nous cherchons à avoir le pas de temps le plus grand possible. Comme la vitesse du vent varie de zéro à 100 m.s^{-1} , il est nécessaire de se restreindre à la zone de stabilité comprise entre l'axe des abscisses et le segment [OA]. En effet, le segment [OA] est défini tel que $U = 100 \approx \frac{c_*}{3}$, soit $\mu_u = \frac{M}{3} \mu_c$. Ainsi pour définir le pas de temps maximal, on cherche l'abscisse du point A, et en fonction du nombre d'onde et de la vitesse du son, on détermine le pas de temps $\Delta\tau$ puis Δt .

On remarque que plus le facteur M est grand, plus cette plage de stabilité est réduite ; ce qui laisse penser que le time-splitting devient trop coûteux pour de grandes valeurs de M , ce qui est pourtant le but recherché. Ainsi, il est important d'augmenter la stabilité de cette méthodes en ralentissant la vitesse de propagation des ondes par ajout de divers filtres.

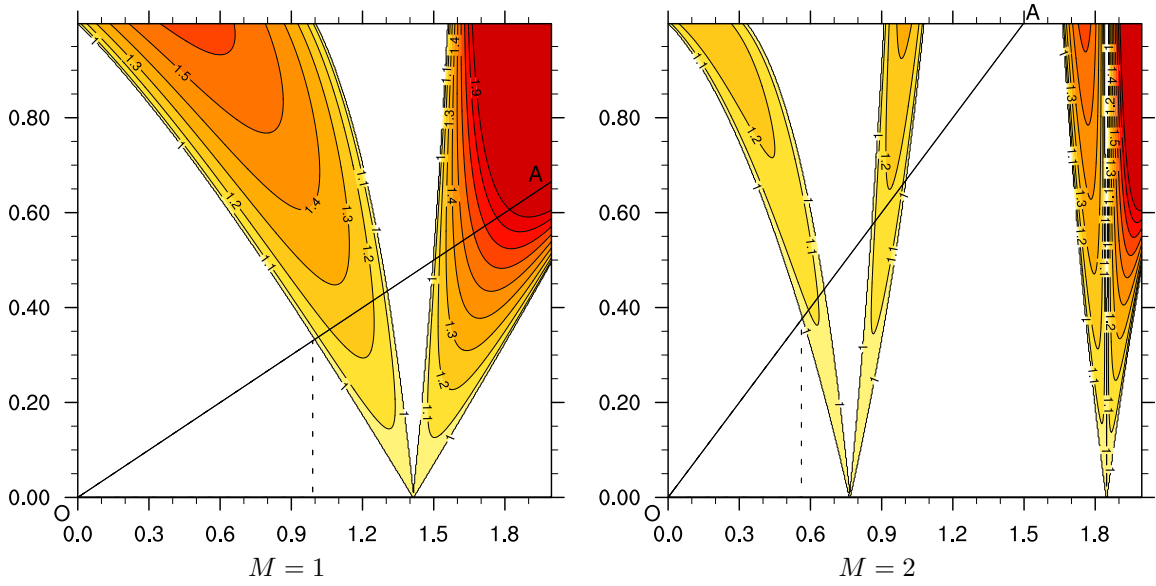


FIGURE 2 – Coefficient d’amplification de la norme L^2 des solutions du système d’Euler en fonction de μ_c en abscisse et μ_u en cordonnée.

2.2 Filtre de Williams

Le filtre de Williams [29] [30], qui généralise le filtre d’Asselin, consiste à ajouter une divergence temporelle dans les équation pour ralentir les ondes de petites fréquences. De plus, il permet de limiter l’effet des variations dûe au mode computationnel. Son principe est illustré par la Fig3 et son algorithme est le suivant (pour une variable quelconque ψ) :

$$\overline{\overline{\psi}}^0 = \overline{\psi}^0 + \frac{\beta\alpha}{2} \left[\overline{\overline{\psi}}^- - 2\overline{\psi}^0 + \psi^+ \right] \quad (17)$$

$$\overline{\psi}^+ = \psi^+ + \frac{\beta(\alpha-1)}{2} \left[\overline{\overline{\psi}}^- - 2\overline{\psi}^0 + \psi^+ \right] \quad (18)$$

où les barres au dessus de ψ dénotent le nombre de fois où la variable est filtrée. Pour retrouver le filtre d’Asselin, il suffit de prendre $\alpha = 1$. L’influence de ce filtre sur l’amplification A est donné par :

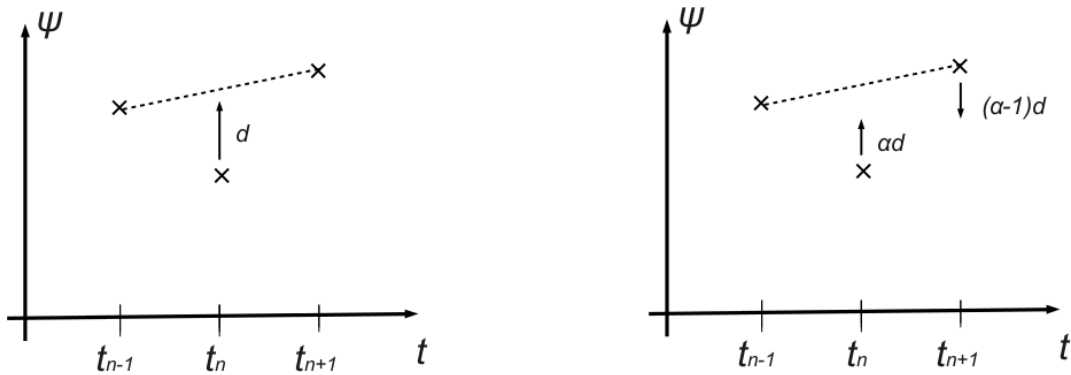


FIGURE 3 – Principe du filtre d’Asselin et de Williams

$$\begin{aligned}
A_{\pm} &= \frac{\beta}{2} + \left(1 + \frac{\beta}{2}(1 - \alpha)\right) i\mu_u \\
&\pm \left[\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)^2 - \left(1 + \frac{\beta}{2}(1 - \alpha)\right)^2 \mu_u^2 + \beta \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) (1 - \alpha) i\mu_u \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

Dans le cas du filtre d'Asselin, on retrouve :

$$A_{\pm} = \frac{\beta}{2} + i\mu_u \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)^2 - \mu_u^2}$$

Si on ajoute le filtre de Williams dans le calcul du leapfrog, une condition nécessaire de stabilité (trouver en faisant un développement limité de la racine complexe dans le calcul de $A_{\pm}$ pour des petites valeurs du nombre de Courant) est :

$$\mu_u \leq \sqrt{8 \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)}$$

Pour illustrer l'impact ces résultats, on peut regarder la Fig4 qui montre la valeur maximale du nombre de Courant assurant l'équilibre du schéma en fonction des deux paramètres α et β . D'après le cas d'étude du filtre d'Asselin, on a d'ores et déjà $1 - \frac{\beta}{2} \geq 0$. Comme remarque importantes, on peut voir que pour α inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$, le schéma est inconditionnellement instable (voir la Fig5). Il est clair que plus α est petit, moins le schéma est stable, et inversement pour β .

On vérifie que sous cette condition, les modes sont amortis ce qui se traduit par un ralentissement de la vitesse propagation d'advection des ondes rapide, et donc l'augmentation la stabilité de du schéma KW78. En plus de cela, ces filtres servent également à amortir le mode computationnel responsables de bruits qui peuvent apparaitre lors du calcul. La Fig5 montre l'amplification A_+ du mode physique en fonction de la CFL pour plusieurs valeurs de β dans le cas du filtre d'Asselin ($\alpha = 1$).

Bien que le filtre diminue la valeur maximale du nombre de Courant assurant la stabilité, pour des valeurs inférieures, nous voyons qu'il y a un amortissement de ce mode. Ce ralentissement offre un gain de stabilité représenté par la Fig7. Dans le cas plus général du filtre de Williams, ces amortissement sont visible par la Fig6, qui reprend les mêmes valeurs de β pour différentes valeurs de α .

D'après Williams, pour avoir un schéma proche de l'ordre trois, il est nécessaire de prendre une valeur de α proche (mais supérieur) $\frac{1}{2}$. Dans cette région, la stabilité est réduite considérablement, ce qui nous impose de regarder ces graphiques autours des valeurs importantes. Ainsi, pour α fixé à 0,53, ne pouvons prendre le coefficient β le plus petit possible pour légèrement augmenter la stabilité, mais aussi, moins affecter l'amortissement du mode physique.

Ainsi, nous allons utiliser le filtre de Williams pour ralentir la vitesse d'advection de modes acoustiques horizontaux, pour ainsi augmenter la stabilité sans perdre la précision du KW78 (Fig7). Lors d'un ajout du filtre, pour faire l'étude de stabilité par valeurs propres, il est nécessaire d'ajouter une matrice $\mathbf{W}$ (définie par 18) le calcul de $Y^{t+\Delta t}$:

$$Y^{t+\Delta t} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{A}^{(j+1)M} \cdot Y^t \quad (19)$$

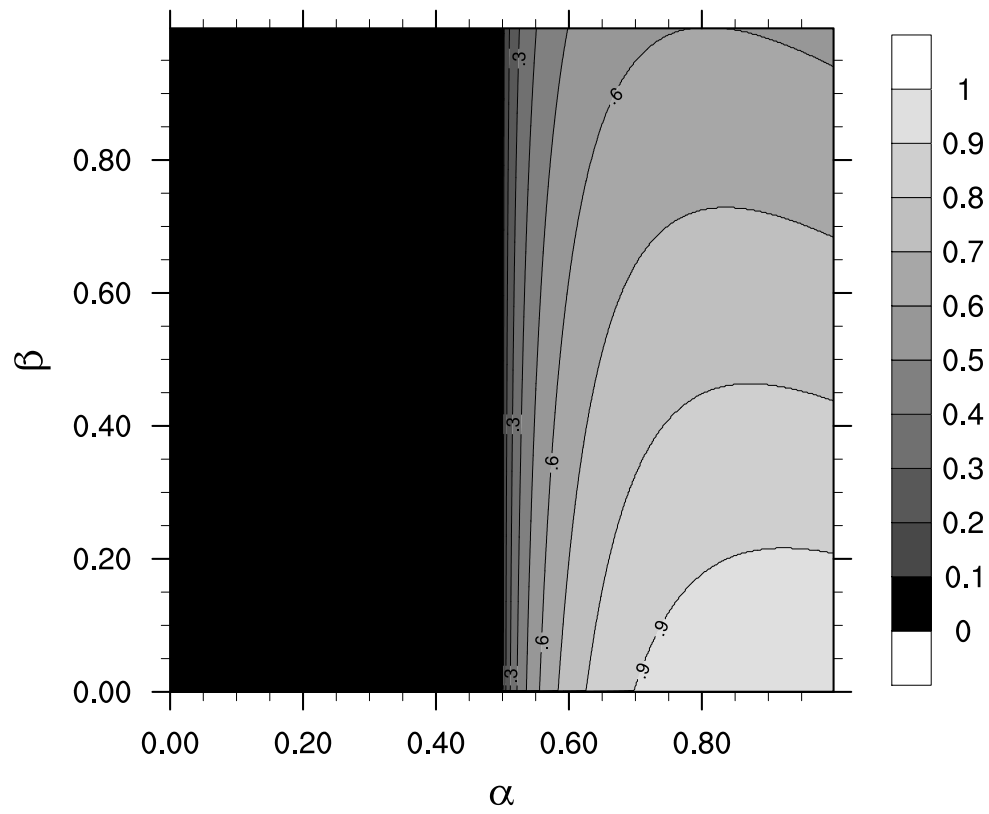


FIGURE 4 – Valeur maximale du nombre de Courant μ_u en fonction de α et β

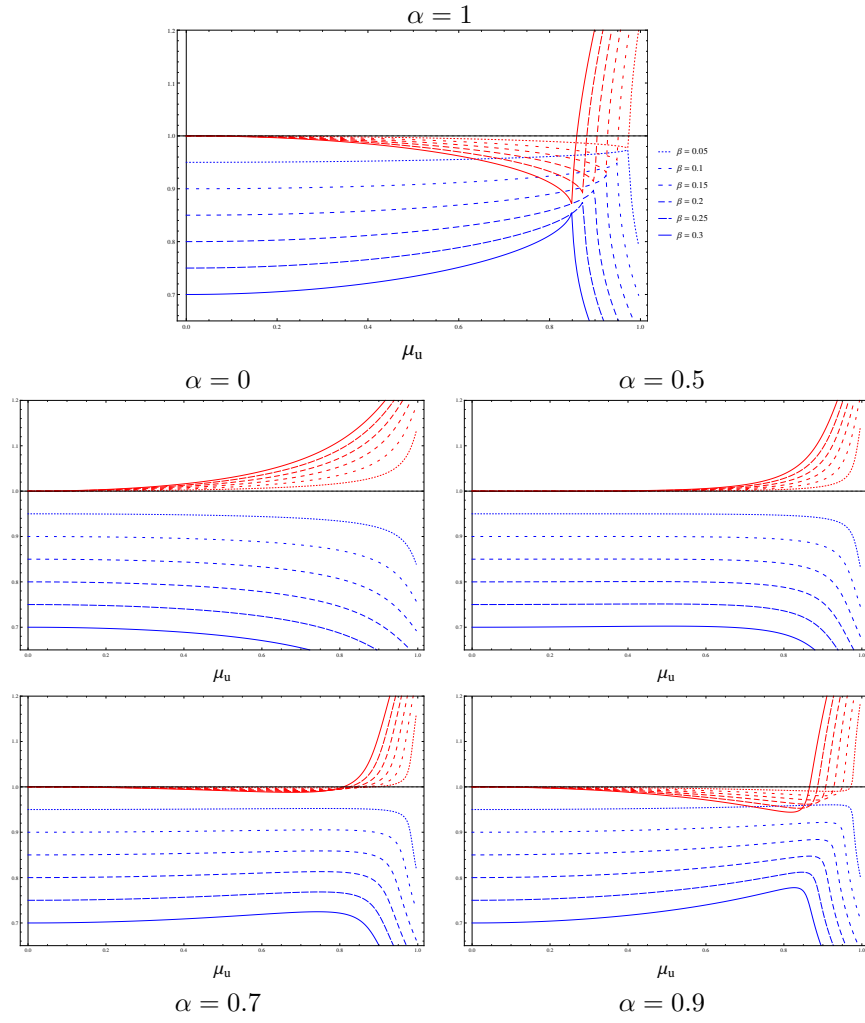


FIGURE 5 – Amplification du mode physique (rouge) et computationnel (bleu) en fonction de la CFL

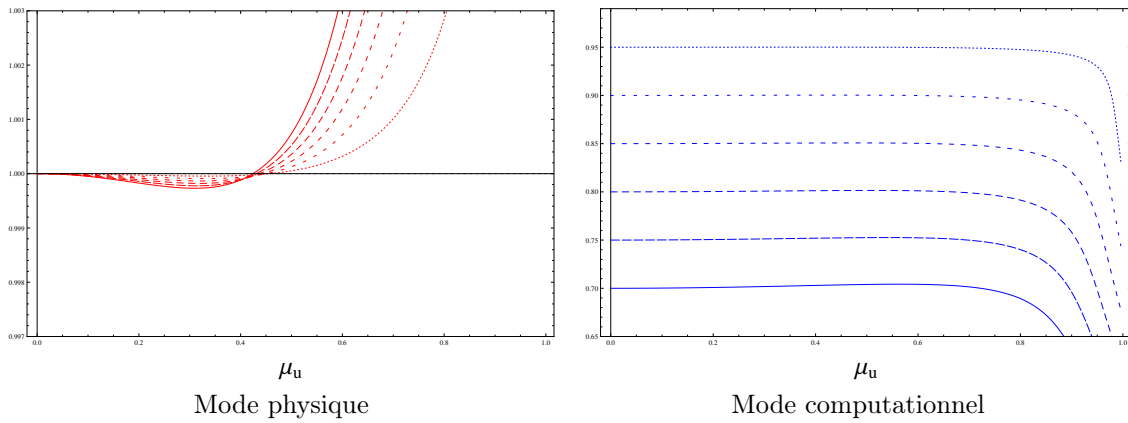


FIGURE 6 – Mêmes graphiques que la Fig5 pour $\alpha = 0, 53$

De manière générale, l'effet du filtre diminue la stabilité pour un nombre de Courant de l'advection élevé, et l'augmente pour des petites valeurs de ce paramètres. De plus, plus β diminue, moins les ondes physiques sont amorties. L'ensemble de ces remarque peuvent être observées en regardant la Fig7.

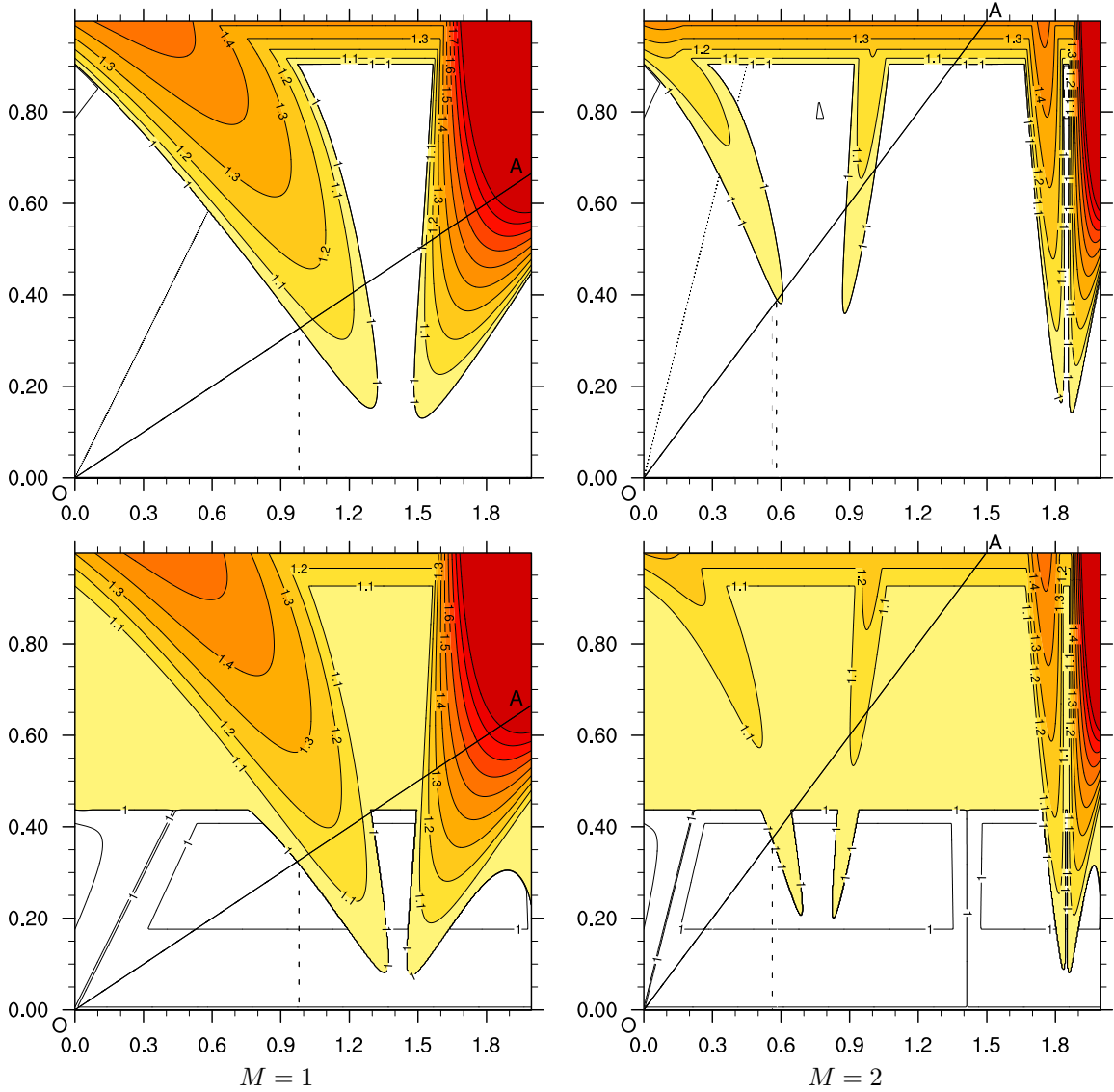


FIGURE 7 – Mêmes graphiques que la Fig2 avec le filtre d'Asselin ($\alpha = 1, \beta = 0, 2$) au dessus et le filtre de Williams ($\alpha = 0, 53, \beta = 0, 05$) en dessous.

Après cette étude, on peut conclure que le filtre de Williams est utile pour des raisons de précision, mais échoue dans l'objectif principale d'augmenter la stabilité du schéma. Nous pouvons ajouter à cette démarche l'idée d'ajouter un coefficient de diffusion numérique dans le système pour modifier la nature des ondes acoustiques horizontales directement dans le système d'Euler afin les ralentir.

2.3 Filtre amortissant de Klemp

L'un des premiers filtres proposé est celui de Skamarock & Klemp [23] qui consiste à ajouter une divergence 3D sur le calcul du vent horizontale et verticale. Ceci modifie la structure de l'ensemble des ondes du système, et déforme trop la solution. De nombreuses idées ont été apportées par Gassmann [9, 10], mais le filtre ne déformant uniquement que les ondes acoustiques horizontales et celui de Klemp [14] qui est de la forme :

$$\partial_t V' = -R\nabla\mathcal{G}T' - RT^*(\mathbf{I} - \mathcal{G})\nabla q' - RT^*\nabla q'_s + \gamma_h\Delta(\nabla V' + \delta d') \quad (20)$$

$$\partial_t d' = -\frac{g}{H_t}\tilde{\partial}(\tilde{\partial} + \mathbf{I})q' + \frac{\gamma_v}{H_*^2}\tilde{\partial}(\tilde{\partial} + \mathbf{I})(\nabla V' + \delta d') \quad (21)$$

$$\partial_t T' = -\frac{RT^*}{C_v}(\nabla V' + d') \quad (22)$$

$$\partial_t q' = \left(S - \frac{C_p}{C_v}\right)\nabla V' - \frac{C_p}{C_v}d' \quad (23)$$

$$\partial_t q'_s = -\mathcal{N}\nabla V' \quad (24)$$

Nous allons regarder trois cas qui correspondent respectivement au filtre de SK92, puis celui de Klemp [14] (K07) et enfin celui de Gassmann [10] (G07). Pour voir l'impact de cet ajout sur le module des solution, il nous faut recalculer l'équation de structure et regarder les modes de ces ondes. La fréquence des ondes est décrite par :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_*^2}\omega^4 + \frac{i}{c_*^2}\left[\gamma_h k^2 - \delta\gamma_v \frac{1}{H_*^2}\left(\nu^2 + \frac{1}{4}\right)\right]\omega^3 - \left[k^2 + \frac{1}{H_*^2}\left(\nu^2 + \frac{1}{4}\right)\right]\omega^2 \\ & - ik^2\left[(1-\delta)\frac{1}{H_*^2}\left(\nu^2 + \frac{1}{4}\right)(\gamma_h - \delta\gamma_v) - \frac{g}{c_*^2 H_*}\left(\delta\gamma_h\left(i\nu - \frac{1}{2}\right) + \gamma_v\left(i\nu + \frac{1}{2}\right)\right)\right]\omega + N_*^2 k^2 = 0 \end{aligned}$$

L'efficacité des filtres se mesure sur deux critères. Le premier est qu'il doit amortir les ondes responsables des instabilités (ici les ondes acoustiques horizontales) et le second est d'amortir le moins possible les autres ondes du système. En annexe, nous laissons l'étude spécifique pour chacun des filtres et nous présentons ici que le tableau qui récapitule leurs propriétés :

Amortissement pour chaque onde du système			
Filtre :	SK92	G07	K07
Conditions :	$\gamma_h = \gamma_v = \gamma$, $\gamma \neq 0$, $\delta = 1$	$\gamma_h \neq \gamma_v$, $\gamma_v = 0$, $\delta = 1$	$\gamma_h \neq \gamma_v$, $\gamma_v = 0$, $\delta = 0$
acoustique verticale	oui	non	non
gravité « oblique »	non	oui	non
gravité horizontale	non	oui	non
acoustique horizontale	oui	oui	oui

Le meilleur filtre est donc celui proposé par Klemp car c'est ce lui qui amortie le moins les autres ondes du système. Pour voir ses effets, nous pouvons regarder la Fig8. Néanmoins, si nous sommes amené à utiliser un tel filtre, il faut reconsidérer certains schémas qui sont, sans ce dernier, fortement instables et qui sans d'ordre deux sans nécessiter le filtre de Williams (et donc la diminution de stabilité).

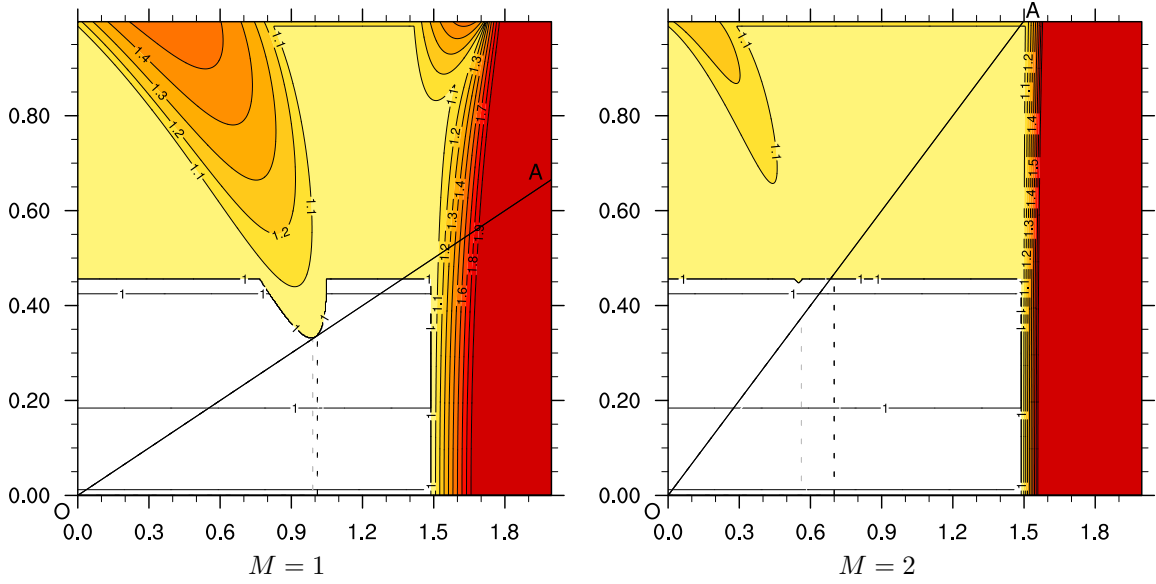


FIGURE 8 – Mêmes graphiques que la Fig2 avec le filtre de Williams ($\alpha = 0,53$, $\beta = 0,05$) et $\gamma = 0,1\Delta\tau c_*^2$.

2.4 Schémas alternatifs

Nous pouvons regarder le schéma de Magazenkov qui est une alternance entre un schéma leapfrog et un schéma d'Adams-Bashforth d'ordre deux pour amortir le mode computationnel. Le principe de l'analyse de stabilité est rigoureusement identique, mise à part que la matrice $\mathbf{A}$ s'écrit comme le produit de deux matrices, l'une étant le traitement leapfrog, et l'autre le traitement du Adams-Bashforth. De plus, les valeurs propres calculées sont le carré des coefficients de déformation complexe des modes propres de la solution, ce qui n'est nullement un problème. La stabilité est donc représentée par la Fig9. Nous remarquons que le filtre de Klemp permet d'augmenter la stabilité du schéma et ce dernier ne nécessitant pas de filtre d'Asselin, et reste donc du deuxième ordre. Néanmoins ce schéma est peu utilisé car plus complexe à mettre en œuvre.

Il est néanmoins plus facile à utiliser que le schéma de Kurihara qui consiste à utiliser un schéma leapfrog pour calculer un état prédictif des variables au temps suivant, et ensuite utiliser un schéma trapézoïdale pour avoir la valeur finale. Ce schéma nécessite plus de mémoire que les deux autres schémas car plusieurs valeurs sont à stocker, et fait 50% de calcul supplémentaires. Il n'est donc jamais utilisé, malgré sa grande plage de stabilité représentée Fig10 qui est d'autant plus importante pour un grand nombre de sous-pas de temps.

Ces deux schémas sont donc plus stables que le schéma initial KW78, mais n'ont encore jamais été utilisés par la difficulté de leur mise en œuvre. Il serait judicieux qu'il soit néanmoins testé dans un modèle académique afin qu'ils soient comparés à KW78 qui est moins stable, et d'un ordre de précision plus faible.

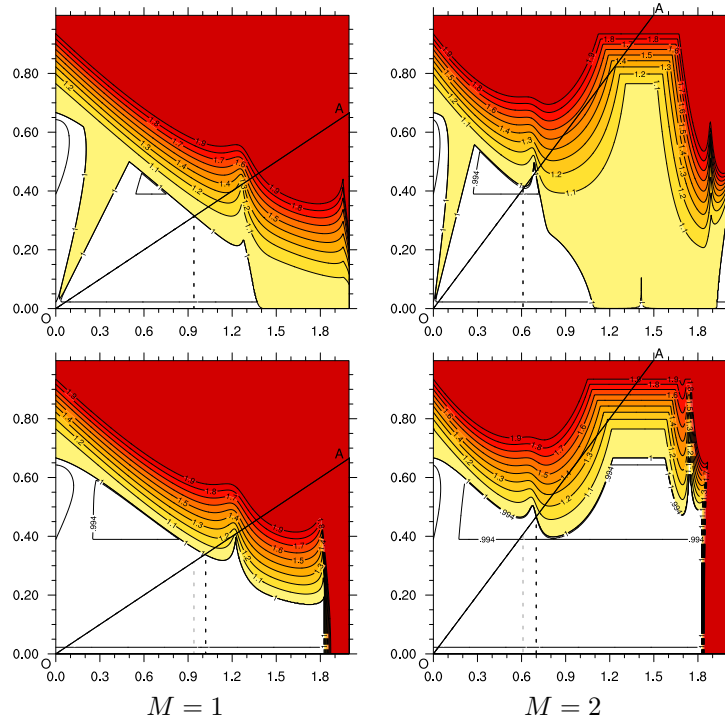


FIGURE 9 – Mêmes graphiques que la Fig2 pour le schéma de Magazenkov avec et sans le filtre de Klemp $\gamma = 0, 1\Delta\tau c_*^2$.

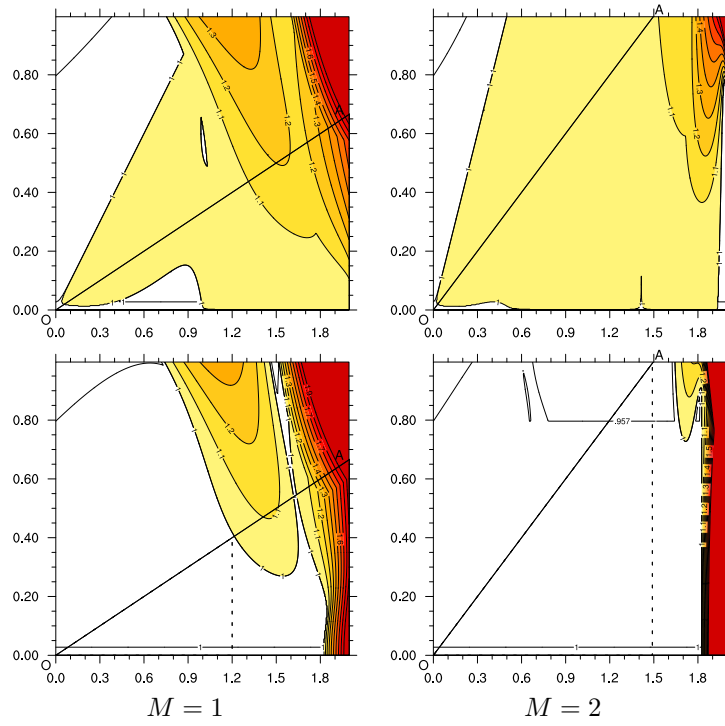


FIGURE 10 – Mêmes graphiques que la Fig9 pour le schéma de Kurihara.

3 Méthodes IMEX

3.1 Présentation de la méthode pour AROME

Des méthodes plus proche de l'idée initiale est de mettre en place une méthode implicite pour la verticale moins précise que la méthodes explicite traitant l'horizontale dans lequel on ajoute l'advection. Les calculs se font tous sur le même pas de temps Δt . On parle alors de méthodes *Implicit-Explicit* (IMEX).

Comme nous l'avons déjà rappeler, il existe des schémas multi-step ou multi-stage. Comme nous allons résoudre entièrement le système, sans faire de séparation entre processus lents et rapides, il est obligatoire d'avoir une nature commune entre les deux schémas du IMEX. Durrant [8] fait le choix d'utiliser des méthodes multi-step qui créent des modes computationnels et qui, dans certains cas, nécessitent d'être amorties (ex : leapfrog). Pour éviter l'usage de ces filtres, nous allons plutôt nous tourner vers les méthodes multi-stage dont une compilation importante a été effectuée par Weller *et al.* [26]. Ces méthodes reposent sur deux schémas Runge-Kutta (un implicite et l'autre explicite) soigneusement choisis. L'écriture générale des schémas IMEX nécessitant s étapes est de la forme :

$$X^{(j)} = X^t + \Delta t \sum_{l=1}^{j-1} \tilde{a}_{jl} \mathcal{E} \left(X^{(l)}, t + \tilde{c}_l \Delta t \right) + \Delta t \sum_{l=1}^j a_{jl} \mathcal{I} \left(X^{(l)}, t + c_l \Delta t \right), \quad j \in \llbracket 1; s \rrbracket \quad (25)$$

$$X^{t+\Delta t} = X^t + \underbrace{\Delta t \sum_{j=1}^s \tilde{b}_j \mathcal{E} \left(X^{(j)}, t + \tilde{c}_j \Delta t \right)}_{\text{modes lents}} + \underbrace{\Delta t \sum_{j=1}^s b_j \mathcal{I} \left(X^{(j)}, t + c_j \Delta t \right)}_{\text{modes rapides}} \quad (26)$$

où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{I}$ sont respectivement la partie explicite et implicite du problème, $\tilde{a}_{jl}$ et a_{jl} les coefficients des matrices $\tilde{A}$ et A , $\tilde{b}_l$ et b_l les coefficients des vecteurs de poids $\tilde{b}$ et b , ainsi que $\tilde{c}_j$ et c_j les coefficients des matrices diagonales $\tilde{C}$ et C , ce qui ensemble définit les tableaux de Butcher suivants :

$\tilde{c}_1$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	c_1	a_{11}	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0
$\tilde{c}_j$	$\tilde{a}_{j1}$	$\tilde{a}_{j2}$	$\cdots$	$\tilde{a}_{jl}$	$\cdots$	0	c_j	a_{j1}	a_{j2}	$\cdots$	a_{jl}	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0
$\tilde{c}_s$	$\tilde{a}_{s1}$	$\tilde{a}_{s2}$	$\cdots$	$\tilde{a}_{sl}$	$\cdots$	0	c_s	a_{s1}	a_{s2}	$\cdots$	a_{sl}	$\cdots$	a_{ss}
	$\tilde{b}_1$	$\tilde{b}_2$	$\cdots$	$\tilde{b}_l$	$\cdots$	$\tilde{b}_s$		b_1	b_2	$\cdots$	w_l	$\cdots$	b_s

Les coefficients $\tilde{c}_j$ et c_j sont traditionnellement définis tels que $\tilde{C}e = \tilde{A}e$ ainsi que $Ce = Ae$ (avec $e = (1, 1, \dots, 1)$). La méthode pour $\mathcal{E}$ est explicite, ce qui explique que, pour le calcul de l'état X^j la somme s'arrête à $j-1$ et que la matrice $\tilde{A}$ est triangulaire strictement inférieure. En revanche, ce n'est pas le cas pour la partie implicite $\mathcal{I}$.

D'après les travaux de Pareschi *et al.* [20], pour que la méthode globale soit consistante, il est nécessaire et suffisant d'avoir :

$${}^t\tilde{b}_e = {}^t b_e = 1 \quad (27)$$

De plus, pour que la méthode soit d'ordre deux, il est faut et il suffit :

$${}^t b A e = {}^t \tilde{b} \tilde{A} e = \frac{1}{2} \quad (28)$$

$${}^t \tilde{b} A e = {}^t b \tilde{A} e = \frac{1}{2} \quad (29)$$

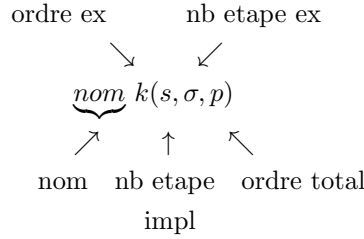
et pour qu'il soit d'ordre trois, il faut et il suffit de rajouter :

$${}^t b C^2 e = {}^t \tilde{b} \tilde{C}^2 e = \frac{1}{3} ; \quad {}^t b A C e = {}^t \tilde{b} \tilde{A} \tilde{C} e = \frac{1}{6} \quad (30)$$

$${}^t \tilde{b} A C e = {}^t b \tilde{A} C e = {}^t b A \tilde{C} e = {}^t \tilde{b} \tilde{A} \tilde{C} e = {}^t \tilde{b} A \tilde{C} e = {}^t b \tilde{A} \tilde{C} e = \frac{1}{6} \quad (31)$$

$${}^t \tilde{b} C^2 e = {}^t \tilde{b} \tilde{C} C e = {}^t b \tilde{C}^2 e = \frac{1}{3} \quad (32)$$

Ces conditions se retrouvent par développement de Taylor de la solution exacte. Les conditions (27), (28) et (30) correspondent aux conditons classiques pour les schémas Runge-Kutta séparés. Dû à l'accumulation de deux méthodes Runge-Kutta, les conditons (29), (31) et (32) sont à ajouter pour acquérir l'ordre de convergence. L'ensemble de ces conditions restent relativement faible, ce qui permet de créer plusieurs schémas. Weller analyse une bonne partie de ces schémas dans le cas des équations acoustiques. Tous les schémas se nomment sous la forme $nom\ k(s, \sigma, p)$ dont la nomenclature est la suivante :



Pour la partie traitée par le schéma $\mathcal{E}$, nous allons calculer les processus les plus importants, et donc, il faut chercher un schéma avec k le plus grand possible. Néanmoins, plus le nombre d'étape s et σ sont petits, moins il y a de calculs à effectuer, ce qui est important dans un contexte opérationnel (et particulièrement pour la partie implicite s qui nous oblige à résoudre une équation d'Helmholtz). C'est pourquoi, nous allons nous concentrer sur deux schémas : le trap(2,2,2) qui est le plus rapide, et le ARK2(2,3,2) (défini par Giraldo [11]) qui est le plus précis et l'un des moins coûteux. D'autres méthodes ont été mises en œuvre comme le SSP2(2,2,2) et SSP3(3,3,2) qui sont tous deux définis par Pareschi *et al.* [20] et qui ont une partie explicite *Strong Stability Preserving* (ou encore *Total Variation Diminishing* (TVD), qui a une utilité dans le cas d'un calcul par de divergence horizontale par différences finies mais du coup n'ayant que peu d'utilité le cadre de AROME. Pour augmenter la précision, il est possible de regarder les méthodes SSP3(4,3,3) ou ARS3(4,4,3) qui sont d'ordre trois pour le schéma entier, comme pour le traitement des ondes rapides, ce qui est très coûteux dans la mesure où les processus rapides ont un faible impact sur la dynamique du climat. Les tableaux de Butcher de chacune de des méthodes IMEX retenues sont définis par :

$$\begin{array}{l}
 \text{trap2(2,2,2) :} \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array} \\
 \\
 \text{ARK2(2,3,2) :} \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\gamma & 2\gamma & 0 & 0 \\ 1 & 1-\alpha & \alpha & 0 \\ \hline & \delta & \delta & \gamma \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\gamma & \gamma & \gamma & 0 \\ 1 & \delta & \delta & \gamma \\ \hline & \delta & \delta & \gamma \end{array}
 \end{array}$$

où $\alpha = 1/2 + \sqrt{2}/3$, $\delta = -2\sqrt{2}/3$ et $\gamma = 1 - \sqrt{2}/2$.

Quelque soit la méthode choisie, et la différence notable avec le time-splitting, et que nous pouvons choisir entre utiliser la valeur du vent horizontal de manière implicite dans le calcul de la pression et de la température (méthode *U-forward* and *q-backward* ou **UfPreb**) ou explicite (**UfPref**) et ceci sans toucher à la précision des schémas ainsi que au nombre de calcul à effectuer.

Pour faire une étude de stabilité linéaire en fonction des deux conditions CFL μ_x et μ_σ (définies pour chacune des directions horizontale et verticale), nous passons dans l'espace spectrales non-borné et nous utilisons l'équation de structure (12) nous déterminons que les valeurs propres de l'opérateur Laplacien vertical $\tilde{\partial}(\tilde{\partial} + \text{I})$ sont de la forme $-(\nu^2 + \frac{1}{4})$. Ainsi, on déduit les nombres de Courant suivants :

$$\begin{aligned}\mu_x(k) &= c_* k \Delta t \\ \mu_\sigma(\nu) &= \frac{c_* (\nu^2 + 1/4)^{1/2}}{H_*} \Delta t\end{aligned}$$

Nous avons le schéma suivant pour calculer toutes les étapes intermédiaires :

$$V^{(j)} = V^t + \frac{\mu_x(k)}{c_*} \sum_{l=1}^{j-1} \tilde{a}_{jl} \left(R\mathcal{G}T^{(l)} + RT^*(\text{I} - \mathcal{G})q^{(l)} + RT^*q_s^{(l)} - UV^{(l)} \right) \quad (33)$$

$$d^{(j)} = d^t + \frac{\mu_x(k)}{c_*} \sum_{l=1}^{j-1} \tilde{a}_{jl} U d^{(l)} + \frac{\mu_\sigma(\nu)}{c_*} g(\nu^2 + 1/4)^{1/2} \sum_{l=1}^j a_{jl} q^{(l)} \quad (34)$$

$$T^{(j)} = T^t + \frac{\mu_x(k)}{C_p} \left[\left(\zeta a_{jj} + \sum_{l=1}^{j-1} (1 - \zeta) \tilde{a}_{jl} + \zeta a_{jl} \right) V^{(l)} + \sum_{l=1}^{j-1} \tilde{a}_{jl} U T^{(l)} \right] + \frac{H_* RT^* \mu_\sigma(\nu)}{c_* (\nu^2 + 1/4)^{1/2}} \sum_{l=1}^j a_{jl} d^{(l)} \quad (35)$$

$$q^{(j)} = q^t + \frac{\mu_x(k)}{c_*} \left[\left(\zeta a_{jj} + \sum_{l=1}^{j-1} (1 - \zeta) \tilde{a}_{jl} + \zeta a_{jl} \right) \left(\mathcal{S} - \frac{C_p}{C_v} \right) V^{(l)} + \sum_{l=1}^{j-1} \tilde{a}_{jl} U q^{(l)} \right] \quad (36)$$

$$- \frac{H_* C_p \mu_\sigma(\nu)}{c_* C_v (\nu^2 + 1/4)^{1/2}} \sum_{l=1}^j a_{jl} d^{(l)} \quad (37)$$

$$q_s^{(j)} = q_s^t + \frac{\mu_x(k)}{c_*} \left(\zeta a_{jj} + \sum_{l=1}^{j-1} (1 - \zeta) \tilde{a}_{jl} + \zeta a_{jl} \right) \mathcal{N} V^{(l)} \quad (38)$$

Dans le cas **UfPref**, on prend $\zeta = 0$ alors que dans le cas **UfPreb** $\zeta = 1$.

Une fois l'ensemble des valeurs déterminé, il suffit de calculer l'état des variables au temps suivant selon le même principe.

$$V^{t+\Delta t} = V^t + \frac{\mu_x(k)}{c_*} \sum_{l=1}^s \tilde{b}_l \left(R\mathcal{G}T^{(l)} + RT^*(\text{I} - \mathcal{G})q^{(l)} + RT^*q_s^{(l)} - UV^{(l)} \right) \quad (39)$$

$$d^{t+\Delta t} = d^t + \frac{\mu_x(k)}{c_*} \sum_{l=1}^s \tilde{b}_l U d^{(l)} + \frac{\mu_\sigma(\nu)}{c_*} g(\nu^2 + 1/4)^{1/2} \sum_{l=1}^s b_l q^{(l)} \quad (40)$$

$$T^{t+\Delta t} = T^t + \frac{\mu_x(k)}{C_p} \left[\left(\sum_{l=1}^s (1 - \zeta) \tilde{b}_l + \zeta b_l \right) V^{(l)} + \sum_{l=1}^s \tilde{b}_l U T^{(l)} \right] + \frac{H_* RT^* \mu_\sigma(\nu)}{c_* (\nu^2 + 1/4)^{1/2}} \sum_{l=1}^s b_l d^{(l)} \quad (41)$$

$$q^{t+\Delta t} = q^t + \frac{\mu_x(k)}{c_*} \left[\left(\sum_{l=1}^s (1 - \zeta) \tilde{b}_l + \zeta b_l \right) \left(\mathcal{S} - \frac{C_p}{C_v} \right) V^{(l)} + \sum_{l=1}^s \tilde{b}_l U q^{(l)} \right] \quad (42)$$

$$- \frac{H_* C_p \mu_\sigma(\nu)}{c_* C_v (\nu^2 + 1/4)^{1/2}} \sum_{l=1}^s b_l d^{(l)} \quad (43)$$

$$q_s^{t+\Delta t} = q_s^t + \frac{\mu_x(k)}{c_*} \left(\sum_{l=1}^s (1 - \zeta) \tilde{b}_l + \zeta b_l \right) \mathcal{N} V^{(l)} \quad (44)$$

3.2 Stabilité des modèles envisagés

Pour faire l'étude de stabilité de cette méthode, nous allons chercher les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ telle que $X^{t+\Delta t} = \mathbf{A}X^t$. D'après W13, cette matrice peut être définie comme suit :

$$\mathbf{A}^{(j)} = \mathbf{I} + \Delta t \sum_{l=1}^{j-1} \tilde{a}_{jl} S \cdot \mathbf{A}^{(l)} + \Delta t \sum_{l=1}^j a_{jl} F \cdot \mathbf{A}^{(l)} \quad (45)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \Delta t \sum_{j=1}^m \tilde{w}_j S \cdot \mathbf{A}^{(j)} + \Delta t \sum_{j=1}^m w_j F \cdot \mathbf{A}^{(j)} \quad (46)$$

où S est la matrice qui contient les termes traités de manière explicite alors que F contient les termes responsables de la propagation rapide qui sont définie par l'algorithme ci-avant. Si on se restreint au cas des ondes acoustiques, nous retrouvons les résultats de Weller. La Fig11 montre les résultats obtenue dans le cas UfPref et UfPreb avec les différents schémas.

En comparant l'ensemble des ces schémas, nous pouvons conclure que les meilleurs candidats sont le schéma ARK2(2,3,2) et ARS(2,3,2). Néanmoins, le schéma ARK(2,3,2) semble être plus précis que son rival, d'après les travaux de Weller. Comparé au time-splitting, il nous donne une plus large stabilité (notamment dans le cas UfPreb), ainsi qu'une meilleure précision. De plus, comme il n'utilise qu'un seul pas de temps, il ne nécessite d'aucun filitre. Ainsi, nous pensons que dans le cadre des schémas HEVI, ce schéma, initialement proposé par Giraldo, nous donne le meilleur compromis entre la stabilité, la précision et le volume de calcul.

Nous avons vérifié que la stabilité de cette méthode ne dépendait pas du choix des variables pronostiques que nous avons fait. Nous avons une stabilité identique si nous remplaçons l'équation du géopotential par l'équation de température en T ou $\ln(T)$.

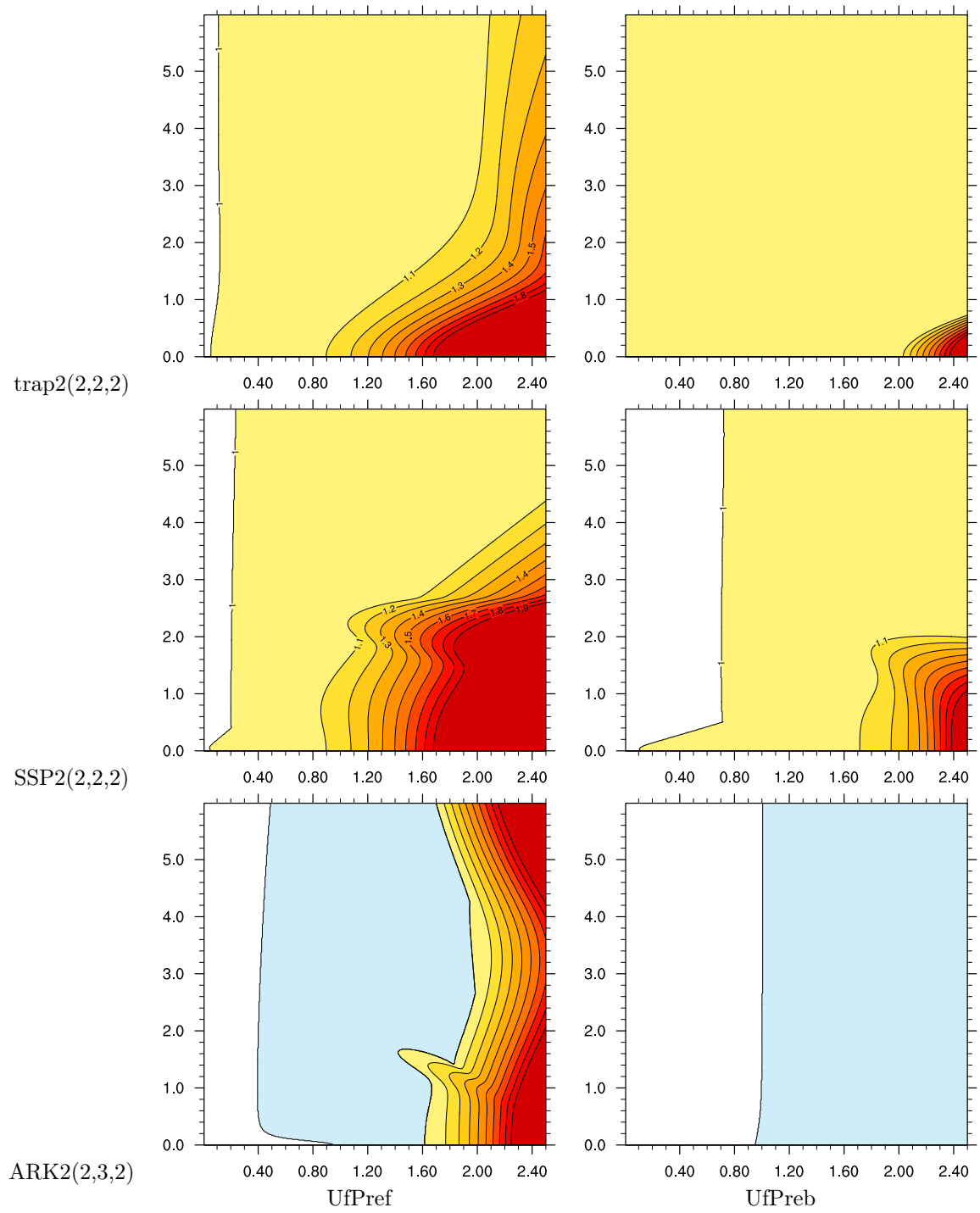


FIGURE 11 – Coefficient d'amplification pour EE en fonction de μ_{cx} et μ_{cz}

Conclusion

Dans ce travail, nous avons donc regardé deux familles de méthodes servant à approcher les solutions du système d'Euler dans le cadre HEVI. La première, le time-splitting, cherche à linéariser le système $\mathcal{M}$ à chaque grand pas de temps, et utilise des sous-pas de temps pour déterminer le prochaine état autour du quel nous allons relinéariser. Un large choix des méthodes numériques pour résoudre la partie advective (qui doit être résolue avec un schéma d'ordre élevé) est théoriquement possible, mais dans le cadre d'AROME, ce choix se limite aux seuls possibilités multi-step comme le leapfrog pour lequel il est nécessaire d'ajouter des filtres pour amortir les modes computationnels parasitant la solution. Nos résultats sont en accords avec ceux issus des travaux de Skamalrock et Durran, et malgré la facilité de mise en œuvre, cette méthode souffre d'une faible stabilité doublée d'un problème de précision. Face à ces difficultés, d'autres schémas peuvent être envisagés comme Magazenkov ou Kurihara qui, bien que plus ardu à utiliser, semble être plus stable, mais surtout, sont plus précis.

Les méthodes IMEX semble pour certaines encore plus stables, et particulièrement celle du Giraldo, le ARK(2,3,2) qui proposent de traiter les phénomènes sur un même pas de temps, en utilisant deux méthodes multi-stage dont une implicite pour la partie verticale. Par sa nature, cette famille utilise plus de mémoire que ses cousines du time-splitting. Plus complexe à mettre en place, ces méthodes permettent d'avoir une plus grande précision pour l'ensemble des ondes supportées par le système. Cependant, beaucoup de travail reste à faire sur ces nouvelles méthodes, notamment sur l'impact du relief.

Ce travail constitue une première étape vers l'élaboration d'une méthode HEVI pour les équations d'Euler pleinement compressibles aux coordonnées masse. Par la suite, il conviendrait de confirmer ces analyses de stabilité par des tests numériques dans un contexte académique.

Annexe

1°) Schéma forward-backward : Concentrons nous sur le système non-borné dans lequel l'advection est nulle (i.e : $U = 0$). Le principe des schémas HEVI est donc de traiter l'horizontale de manière explicite et la verticale de manière implicite. Pour avoir un schéma neutre, il est donc nécessaire que la partie verticale (i.e la divergence verticale du vent que ça soit son équation pronostique ou ses coefficients) soit traitée de manière semi-implicite avec un schéma trapézoïdale. Pour la partie horizontale il existe quelque subtilités pour avoir un schéma conditionnellement stable comme le montre le système suivant :

$$\begin{aligned}
 V^+ &= \overbrace{V^0 - Rik\Delta\tau [T^0 + T^*(i\nu + 1/2)q^0]}^{\text{explicite}} \\
 d^+ &= d^0 + \frac{g\Delta\tau}{H_*} \left(\nu^2 + \frac{1}{4} \right) \frac{q^+ + q^0}{2} \\
 T^+ &= T^0 + ik \frac{RT^*}{C_v} \Delta\tau V^+ + \frac{RT^*}{C_v} \Delta\tau \frac{d^+ + d^0}{2} \\
 \left(i\nu + \frac{1}{2} \right) q^+ &= \left(i\nu + \frac{1}{2} \right) q^0 + \Delta\tau \left[\underbrace{ik \left(1 - \frac{C_p}{C_v} \left(i\nu + \frac{1}{2} \right) \right)}_{\text{implicite}} V^+ - \underbrace{\frac{C_p}{C_v} \left(i\nu + \frac{1}{2} \right) \frac{d^+ + d^0}{2}}_{\text{semi-implicite}} \right]
 \end{aligned}$$

En définissant λ , le coefficient de déformation complexe tel que $X^+ = \lambda X^0$ et écrivant ce système sont un produit matrice-vecteur nul, et comme nous cherchons des solutions non-nulles, nous pouvons conclure que la matrice est singulière. En calculant son déterminant nous retrouvons l'équation de structure mais discrétisée.

$$\Lambda_-^4 + c_*^2 \Delta\tau^2 \left(k^2 \lambda + \frac{1}{4H_*^2} \left(\nu^2 + \frac{1}{4} \right) \Lambda_+^2 \right) \Lambda_-^2 + c_*^2 \frac{N_*^2}{4} k^2 \Lambda_+^2 \lambda = 0$$

avec :

$$\begin{cases} \Lambda_- = \lambda - 1 \\ \Lambda_+ = \lambda + 1 \end{cases}$$

Ainsi, en suivant la démarche pour trouver toutes les ondes de ce système, nous pouvons établir toutes les conditions de stabilités :

Onde	Équation	Stabilité
acoustique verticale	$(\lambda - 1)^2 + \left(\frac{c_* \Delta\tau}{2H_*} \right)^2 \left(\nu^2 + \frac{1}{4} \right) (\lambda + 1)^2 = 0$	$ \lambda = 1$
gravité « oblique »	$(\lambda - 1)^2 + \left(\frac{N_* \Delta\tau}{2} \right)^2 (\lambda + 1)^2 = 0$	$ \lambda = 1$
gravité horizontale	$(\lambda - 1)^2 + \left(\frac{N_* H_* k \Delta\tau}{2} \right)^2 \lambda = 0$	$ \lambda = 1 \Leftrightarrow N_* H_* k \Delta\tau \leq 1$
acoustique horizontale	$(\lambda - 1)^2 + (c_* k \Delta\tau)^2 \lambda = 0$	$ \lambda = 1 \Leftrightarrow c_* k \Delta\tau \leq 2$

Comme nous l'avons déjà dit, dans les conditions de température du climat, la condition portant sur les ondes acoustiques horizontales sont les plus restrictives.

Pour ce qui est du traitement implicite du vent horizontal, les calculs montrent que dès que l'on ajoute une dose explicite sur cette variable, alors le système devient inconditionnellement instable (en effet, cela revient à utiliser un schéma de type Runge-Kutta d'ordre deux qui est instable). La façon présentée est donc l'unique manière d'avoir un schéma HEVI n'utilisant que deux pas de temps et qui soit stable. Enfin, il est important de souligner que ces conditions de stabilités sont indépendantes du choix de variable que nous avons fait, car ces critères ont été bâtis sur l'équation de structure qui est la même pour tous les jeux de variables.

D'après nos tests, le système borné est soumis au même contraintes de stabilité.

2°) Étude des filtres : Pour voir ces impacts, nous procéderons de la même manière que dans la première partie.

Cas SK92 ($\gamma_h = \gamma_h = \gamma \neq 0$ et $\delta = 1$) : C'est le filtre original. Pour étudier ses effets, nous allons regarder la solution de chacune des équations définissant les quatre ondes de notre système.

Onde	Conditions		Équation
acoustique verticale	$k = 0$	$N_* = 0$	$\omega^2 + i\gamma \frac{1}{H_*^2} \left(\nu^2 + \frac{1}{4}\right) \omega - \left(\frac{c_*}{H_*}\right)^2 \left(\nu^2 + \frac{1}{4}\right) = 0$
gravité « oblique »	$\nu = 0$	$\frac{1}{4H_*^2} \ll k^2$ $c_* \rightarrow \infty$	$\omega^2 - N_*^2 = 0$
gravité horizontale	$\nu = 0$	$k^2 \ll \frac{1}{4H_*^2}$ $c_* \rightarrow \infty$	$\omega^2 - 4H_*^2 k^2 N_*^2 = 0$
acoustique horizontale	$\nu = 0$	$\frac{1}{4H_*^2} \ll k^2$ $N_* = 0$	$\omega^2 + i\gamma k^2 \omega - (c_* k)^2 = 0$

Avec ce filtre, les ondes de gravité ne sont absolument pas affectées, car les équations sont les mêmes. En revanche, les ondes acoustiques sont elles bien modifiées. Il est important de remarquer que ces équations nous donnent une condition sur la valeur maximale que peut avoir le coefficient γ de la diffusion car pour avoir des solutions non-imaginaires il faut nécessairement que ce coefficient soit inférieur à la plus petite valeur entre $\frac{2c_*}{k^2}$ et $\frac{2c_* H_*^2}{\nu^2 + 1/4}$. Les solutions de ces équations sont maintenant faciles à déterminer :

$$\begin{aligned}\omega_{1,2} &= \pm \sqrt{\nu^2 + \frac{1}{4}} c_* \left(1 - \frac{\gamma \sqrt{\nu^2 + 1/4}}{4c_*^2} \right) - i\gamma \frac{\nu^2 + 1/4}{2} \\ \omega_{1,2} &= \pm k c_* \left(1 - \frac{\gamma k}{4c_*^2} \right) - i\gamma \frac{k^2}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons donc les ondes acoustiques qui sont amorties du fait de l'apparition du terme imaginaire dans la solution. En effet, comme les solutions sont de la forme $\hat{X}(x, \sigma) e^{-i\omega t}$, l'ajout de ce filtre vient diviser la solution des ondes acoustiques horizontales par $\gamma \frac{k^2}{2}$ et $\gamma \frac{\nu^2 + 1/4}{2}$.

Cas G07 ($\gamma_h \neq 0, \gamma_v = 0$ et $\delta = 1$) :

Onde	Conditions		Équation
acoustique verticale	$k = 0$	$N_* = 0$	$\omega^2 - \left(\frac{c_*}{H_*}\right)^2 \left(\nu^2 + \frac{1}{4}\right) = 0$
gravité « oblique »	$\nu = 0$	$\frac{1}{4H_*^2} \ll k^2$ $c_* \rightarrow \infty$	$\omega^2 + i\gamma_h \frac{g}{2H_* c_*^2} \omega - N_*^2 = 0$
gravité horizontale	$\nu = 0$	$k^2 \ll \frac{1}{4H_*^2}$ $c_* \rightarrow \infty$	$\omega^2 + i\gamma_h \frac{2gH_* k^2}{c_*^2} \omega - 4H_*^2 k^2 N_*^2 = 0$
acoustique horizontale	$\nu = 0$	$\frac{1}{4H_*^2} \ll k^2$ $N_* = 0$	$\omega^3 + i\gamma_h k^2 \omega^2 - (c_* k)^2 \omega - i\gamma_h \frac{gk^2}{2H_* c_*^2} = 0$

En utilisant les mêmes méthodes que pour le filtre précédent, on remarque que ce filtre amortit également les ondes de gravité. Il modifie donc trop les solutions pour être envisagé.

Cas K07 ($\gamma_h \neq 0, \gamma_v = 0$ et $\delta = 0$) :

Onde	Conditions		Équation
acoustique verticale	$k = 0$	$N_* = 0$	$\omega^2 - \left(\frac{c_*}{H_*}\right)^2 \left(\nu^2 + \frac{1}{4}\right) = 0$
gravité « oblique »	$\nu = 0$	$\frac{1}{4H_*^2} \ll k^2$ $c_* \rightarrow \infty$	$\omega^2 - N_*^2 = 0$
gravité horizontale	$\nu = 0$	$k^2 \ll \frac{1}{4H_*^2}$ $c_* \rightarrow \infty$	$\omega^2 - 4H_*^2 k^2 N_*^2 = 0$
acoustique horizontale	$\nu = 0$	$\frac{1}{4H_*^2} \ll k^2$ $N_* = 0$	$\omega^2 + i\gamma k^2 \omega - (c_* k)^2 = 0$

Comme nous retrouvons l'équation des ondes acoustiques verticales sans modification due au filtre (la différence du filtre de SK92), nous pouvons conclure qu'il ne modifie que les ondes acoustiques horizontales et non-plus l'ensemble des ondes acoustiques. Il reste donc le meilleur candidat.

Références

- [1] Uri M Ascher, Steven J Ruuth, and Brian TR Wetton. Implicit-Explicit methods for time-dependent partial differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 32 :797–823, 1995.
- [2] Richard Asselin. Frequency filter for time integrations. *Monthly Weather Review*, 100, 1972.
- [3] Pierre Bénard. Stability of Semi-Implicit and iterative centered-implicit time discretizations for various equation systems used in NWP. *arXiv preprint physics/0311123*, 2002.
- [4] Pierre Bénard, René Laprise, Jozef Vivoda, and Petra Smolíková. Stability of Leap-Frog constant-coefficients semi-implicit schemes for the fully elastic system of Euler equations : Flat-terrain case. *arXiv preprint physics/0311123*, 2003.
- [5] Pierre Bénard, Ján Mašek, and Petra Smolíková. Stability of Leap-Frog constant-coefficients semi-implicit schemes for the fully elastic system of Euler equations : Case with orography. *Monthly Weather Review*, 133(5) :1065–1075, 2005.
- [6] Elisabetta Cordero and Andrew Staniforth. A problem with the Robert-Asselin time filter for three-time-level semi-implicit semi-Lagrangian discretizations. *Monthly Weather Review*, 132(2) :600–610, 2004.
- [7] Dale R Durran. The third-order Adams-Bashforth method : An attractive alternative to Leap-Frog time differencing. *Monthly Weather Review*, 119(3) :702–720, 1991.
- [8] Dale R Durran and Peter N Blossey. Implicit-Explicit multistep methods for fast-wave-slow-wave problems. *Monthly Weather Review*, 140(4) :1307–1325, 2012.
- [9] Almut Gassmann. An improved two-time-level split-explicit integration scheme for non-hydrostatic compressible models. *Meteorology and Atmospheric Physics*, 88(1-2) :23–38, 2005.
- [10] Almut Gassmann and Hans-Joachim Herzog. A consistent time-split numerical scheme applied to the nonhydrostatic compressible equations. *Monthly Weather Review*, 135(1) :20–36, 2007.
- [11] Frank Giraldo, John F Kelly, and Emil Constantinescu. Implicit-Explicit formulations of a three-dimensional nonhydrostatic unified model of the atmosphere (NUMA).
- [12] Sigal Gottlieb and Chi-Wang Shu. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes. *Mathematics of Computation of the American Mathematical Society*, 67(221) :73–85, 1998.
- [13] Akira Kasahara. Various vertical coordinate systems used for numerical weather prediction. *Monthly Weather Review*, 102(7) :509–522, 1974.
- [14] Joseph B Klemp, William C Skamarock, and Jimy Dudhia. Conservative split-explicit time integration methods for the compressible nonhydrostatic equations. *Monthly Weather Review*, 135(8) :2897–2913, 2007.
- [15] Joseph B Klemp and Robert B Wilhelmson. The simulation of three-dimensional convective storm dynamics. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 35(6) :1070–1096, 1978.
- [16] René Laprise. The Euler equations of motion with hydrostatic pressure as an independent variable. *Monthly Weather Review*, 120(1) :197–207, 1992.
- [17] Peter Hjort Lauritzen, Christiane Jablonowski, and Mark Taylor. *Numerical techniques for global atmospheric models*. Springer, 2011.
- [18] Randall J Leveque and Joseph Oliger. Numerical methods based on additive splittings for hyperbolic partial differential equations. *Mathematics of computation*, 40(162) :469–497, 1983.
- [19] Fedor Mesinger. Forward-Backward scheme, and its use in a limited area model. *Contrib. Atmos. Phys.*, 50 :200–210, 1977.
- [20] Lorenzo Pareschi and Giovanni Russo. Implicit-Explicit Runge-Kutta schemes and applications to hyperbolic systems with relaxation. *Journal of Scientific computing*, 25(1-2) :129–155, 2005.
- [21] Masaki Satoh. Conservative scheme for the compressible nonhydrostatic models with the Horizontally Explicit and Vertically Implicit time integration scheme. *Monthly Weather Review*, 130(5) :1227–1245, 2002.
- [22] AJ Simmons, BJ Hoskins, and DM Burridge. Stability of the semi-implicit method of time integration. *Monthly Weather Review*, 106(3) :405–412, 1978.

- [23] William C Skamarock and Joseph B Klemp. The stability of time-split numerical methods for the hydrostatic and the nonhydrostatic elastic equations. *Monthly Weather Review*, 120(9) :2109–2127, 1992.
- [24] William C Skamarock and Joseph B Klemp. Efficiency and accuracy of the Klemp-Wilhelmson time-splitting technique. *Monthly Weather Review*, 122(11) :2623–2630, 1994.
- [25] Yasuo Tatsumi. An economical explicit time integration scheme for a primitive model (of atmosphere). *Meteorological Society of Japan, Journal*, 61 :269–288, 1983.
- [26] Hilary Weller, Sarah-Jane Lock, and Nigel Wood. Runge-Kutta IMEX schemes for the Horizontally Explicit/Vertically Implicit (HEVI) solution of wave equations. *Journal of Computational Physics*, 2013.
- [27] Louis J Wicker and William C Skamarock. A time-splitting scheme for the elastic equations incorporating second-order Runge-Kutta time differencing. *Monthly Weather Review*, 126(7) :1992–1999, 1998.
- [28] Louis J Wicker and William C Skamarock. Time-splitting methods for elastic models using forward time schemes. *Monthly Weather Review*, 130(8) :2088–2097, 2002.
- [29] Paul D Williams. A proposed modification to the Robert-Asselin time filter. *Monthly Weather Review*, 137(8) :2538–2546, 2009.
- [30] Paul D Williams. The RAW filter : an improvement to the Robert-Asselin filter in semi-implicit integrations. *Monthly Weather Review*, 139(6) :1996–2007, 2011.